

Diss. Nr. 3816

Die Verallgemeinerung der Birkhoff-Regularisierung für das räumliche Dreikörperproblem

ABHANDLUNG

zur Erlangung
der Würde eines Doktors der Mathematik

der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE ZÜRICH

vorgelegt von

JÖRG WALDVOGEL
dipl. Math. ETH

geboren am 24. Februar 1938
Stein am Rhein (Kanton Schaffhausen)

Angenommen auf Antrag von

Prof. Dr. E. Stiefel, Referent
Prof. Dr. B. Eckmann, Korreferent

Juris Druck + Verlag Zürich
1966

GPO PRICE \$ _____
CFSTI PRICE(S) \$ _____

Hard copy (HC) 3.00
Microfiche (MF) .75

45

N66. 3.940.1.
(ACCESSION NUMBER)

(THRU)

(CODE)

30

(CATEGORY)

90
CR-78758
(PAGES)
(NASA OR TMX OR AD NUMBER)

Diss. Nr. 3816

**Die Verallgemeinerung
der Birkhoff-Regularisierung für das
räumliche Dreikörperproblem**

ABHANDLUNG

zur Erlangung
der Würde eines Doktors der Mathematik

der
EIDGENÖSSISCHEN TECHNISCHEN
HOCHSCHULE ZÜRICH

vorgelegt von

JÖRG WALDVOGEL
dipl. Math. ETH

geboren am 24. Februar 1938
von Stein am Rhein (Kanton Schaffhausen)

Angenommen auf Antrag von
Prof. Dr. E. Stiefel, Referent
Prof. Dr. B. Eckmann, Korreferent

Juris Druck + Verlag Zürich
1966

Meinen lieben Eltern
in Dankbarkeit gewidmet

PRECEDING PAGE BLANK NOT FILMED.

INHALT

ZUSAMMENFASSUNG	7
1. DIE RAEUMLICHE BIRKHOFF-TRANSFORMATION	9
1.1. Die Abbildung von Kustaanheimo und Stiefel	9
1.2. Inversionen	14
1.3. Herleitung der B_3 -Transformation	17
1.4. Die inverse Transformation	24
1.5. Die Transformation der Differentiale	33
1.6. Geometrische Eigenschaften	40
2. REGULARISIERUNG DES RESTRINGIERTEN DREIKOERPERPROBLEMS	47
2.1. Einführung der räumlichen Birkhoff-Koordinaten	47
2.2. Transformation der Zeit	57
2.3. Formelzusammenstellung	61
2.4. Hinweise zur numerischen Behandlung	65
2.5. Kollisionsbahnen	68
3. REGULARISIERUNG VERWANDTER PROBLEME	72
3.1. Das elliptische restringierte Dreikörperproblem	72
3.2. Ausblick	80
LITERATUR	81

PRECEDING PAGE BLANK NOT FILMED.

VORWORT

Den Anstoss zu dieser Arbeit hat ein Aufenthalt von Herrn Prof. Dr. P. Kustaanheimo (Helsinki) im Sommer 1964 in Zürich gegeben. Seine Zusammenarbeit mit Herrn Prof. Dr. E. Stiefel gipfelte in der im Literaturverzeichnis aufgeführten Publikation der beiden Autoren. Aus einer Weiterentwicklung der darin enthaltenen grundlegenden Gedanken ist die vorliegende Dissertation entstanden. An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Stiefel ganz besonders für seine wertvollen Anregungen und Ratschläge sowie für sein stetes Interesse an meiner Arbeit danken.

Auch Herrn Prof. Dr. B. Eckmann bin ich für das Interesse, das er durch die Uebernahme des Korreferates dieser Dissertation entgegengebracht hat, sehr verbunden.

Mein Dank richtet sich ebenfalls an das Rechenzentrum der ETH, das mir für alle numerischen Experimente uneingeschränkt Rechenzeit zur Verfügung gestellt hat.

Ebenso bin ich Frau S. Eisner für die mit grosser Sorgfalt erstellte Reinschrift sehr zu Dank verpflichtet.

Zürich, April 1966

Jörg Waldvogel

ZUSAMMENFASSUNG

Die Grundlage dieser Arbeit bildet ein Artikel von P. Kustaanheimo und E. Stiefel [2]¹⁾, in welchem eine zur Regularisierung der dreidimensionalen Keplerbewegung geeignete Abbildung angegeben ist. Durch Zusammensetzung jener Transformation mit zwei Inversionen kann eine Abbildung konstruiert werden, welche die simultane Regularisierung der beiden Singularitäten im räumlichen restringierten Dreikörperproblem ermöglicht und damit als dreidimensionale Verallgemeinerung der Birkhoff-Transformation [6] angesehen werden kann. Das zugehörige Differentialgleichungssystem ist neunter Ordnung; wird eine zehnte Integration in Kauf genommen, so lässt sich mit derselben Transformation auch das elliptische restringierte Dreikörperproblem im Raume regularisieren.

1) Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluss der Arbeit.

1. DIE RAEUMLICHE BIRKHOFF-TRANSFORMATION

1.1. Die Abbildung von Kustaanheimo und Stiefel

Anschliessend an eine Arbeit von P. Kustaanheimo über Spinorregularisierung [1] haben P. Kustaanheimo und E. Stiefel in [2] die gestörte Keplerbewegung im Raume regularisiert. Die dazu verwendete Abbildung vom vierdimensionalen Raum R^4 auf den dreidimensionalen Raum R^3 , die wir kurz KS-Transformation nennen wollen, hat mit konformen Abbildungen viele Eigenschaften gemeinsam.

In diesem Abschnitt sollen die wichtigsten Formeln über die KS-Transformation kurz wiederholt und gleichzeitig einige Bezeichnungen und Begriffe eingeführt werden.

Sei $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ ein Punkt in R^4 . Sein Bildpunkt $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ bei der KS-Transformation \mathcal{K} ist durch

$$(1) \quad \begin{aligned} x_1 &= u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 + u_4^2 \\ x_2 &= 2(u_1 u_2 - u_3 u_4) \\ x_3 &= 2(u_1 u_3 + u_2 u_4) \end{aligned}$$

definiert, was wir symbolisch auch als

$$(2) \quad \underline{x} = \mathcal{K} \underline{u}$$

schreiben wollen. Damit gilt

$$(3) \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2.$$

Führen wir in R^3 die Polarkoordinaten r, ϑ, ψ durch

$$(4) \quad \begin{aligned} x_1 &= r \cos \vartheta \\ x_2 &= r \sin \vartheta \cos \psi \\ x_3 &= r \sin \vartheta \sin \psi, \end{aligned}$$

in \mathbb{R}^4 die Polarkoordinaten $\rho, \alpha, \beta, \gamma$ durch

$$(5) \quad \begin{aligned} u_1 &= \rho \cos \alpha \cos \gamma \\ u_2 &= \rho \sin \alpha \cos \beta \\ u_3 &= \rho \sin \alpha \sin \beta \\ u_4 &= \rho \cos \alpha \sin \gamma \end{aligned}$$

ein, so kann (1) auch als

$$(6) \quad \begin{aligned} r &= \rho^2 \\ \vartheta &= 2\alpha \\ \psi &= \beta + \gamma \end{aligned}$$

geschrieben werden.

Bezeichnet \mathcal{R}_φ die Drehung, welche den festen Punkt $\underline{u}_0 = (u_{1,0}, u_{2,0}, u_{3,0}, u_{4,0}) \in \mathbb{R}^4$ in den Punkt \underline{u} ,

$$(7) \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \varphi & 0 & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ u_{3,0} \\ u_{4,0} \end{pmatrix},$$

überführt, so werden durch \mathcal{R} alle Punkte

$$(8) \quad \underline{u} = \mathcal{R}_\varphi \underline{u}_0$$

auf denselben Punkt von \mathbb{R}^3 abgebildet, weil bei \mathcal{R}_φ $\psi = \beta + \gamma$ konstant bleibt. Es gilt also

$$(9) \quad \mathcal{R} \underline{u}_0 = \mathcal{R} \underline{u} = \mathcal{R} \mathcal{R}_\varphi \underline{u}_0.$$

Ein allgemeiner Punkt von \mathbb{R}^3 hat demnach viele Urbilder in \mathbb{R}^4 ; lediglich der Nullpunkt und der unendlich ferne Punkt von \mathbb{R}^3 haben nur je einen Urbildpunkt.

Im Zusammenhang mit der KS-Transformation nennen wir die Drehungen (7) automorphe Transformationen im Raume \mathbb{R}^4 ; diese

bilden eine kontinuierliche, einparametrische Gruppe, denn es gilt

$$(10) \quad \mathcal{N}_p^g \mathcal{N}_z^g u_0 = \mathcal{N}_{p+X}^g u_0,$$

was man mittels (7) leicht bestätigt. Die Bahnkurven, welche die Punkte von R^4 bei den automorphen Transformationen beschreiben, sollen im folgenden Fasern in R^4 genannt werden. Alle Punkte einer Faser in R^4 werden durch die KS-Transformation auf denselben Punkt von R^3 abgebildet.

Mit der Matrix

$$(11) \quad K = \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 & -u_3 & u_4 \\ u_2 & u_1 & -u_4 & -u_3 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 \\ u_4 & -u_3 & u_2 & -u_1 \end{pmatrix}$$

lässt sich die KS-Transformation im Kleinen als

$$(12) \quad \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ 0 \end{pmatrix} = 2K \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \\ du_4 \end{pmatrix}$$

darstellen, falls durch die unterste Komponente von (12) die nichtholonome Bedingung

$$(13) \quad u_4 du_1 - u_3 du_2 + u_2 du_3 - u_1 du_4 = 0$$

zwischen den Differentialen du_i gefordert wird. In den Polarkoordinaten (5) nimmt diese Bedingung (im folgenden Nebenbedingung genannt) die Gestalt

$$\sin^2 \alpha \cdot d\beta = \cos^2 \alpha \cdot d\gamma$$

an.

Die Matrix K ist ein Vielfaches einer orthogonalen und normierten Matrix, d.h. sie hat die Eigenschaft

$$(14) \quad K^T K = K K^T = \text{konst.} \cdot E$$

wobei K^T die Transponierte von K und E die Einheitsmatrix bedeutet. Eine solche Matrix vom Typus K nennen wir verallgemeinert orthogonal.

Ist die quadratische Matrix A verallgemeinert orthogonal, so ist die Norm $N(A)$ von A durch die zu (14) analoge Gleichung

$$(15) \quad A^T A = A A^T = N(A) \cdot E$$

definiert. Für später sei hier noch die "Normenproduktregel" für verallgemeinert orthogonale Matrizen erwähnt:

Sind die Matrizen A_1, A_2 verallgemeinert orthogonal, so gilt

$$(16) \quad N(A_1 A_2) = N(A_1) \cdot N(A_2),$$

was leicht aus der Definition (15) der Norm gefolgert werden kann.

Für die Norm von K ergibt sich aus (11)

$$N(K) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 ;$$

damit folgt aus (12) die wichtige Beziehung

$$(17) \quad \begin{aligned} & dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \\ & = 4(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2)(du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 + du_4^2), \end{aligned}$$

die jedoch nur richtig ist, wenn die Differentiale du_k die Nebenbedingung (13) erfüllen.

Der lineare dreidimensionale Raum der vom Punkt $\underline{u} \neq (0,0,0,0)$ ausgehenden Vektoren $d\underline{u}$, welche zusammen mit \underline{u} die Nebenbedingung (13) erfüllen, steht orthogonal auf der durch \underline{u}

gehenden Faser und wird durch \mathcal{R} winkeltreu auf R^3 abgebildet.

Dagegen verdoppelt die KS-Transformation den Winkel zwischen den vom Nullpunkt ausgehenden Vektoren $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ und $u^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*)$, wenn die Beziehung

$$u_4 u_1^* - u_3 u_2^* + u_2 u_3^* - u_1 u_4^* = 0$$

gilt.

Die Umkehrabbildung von (1) ist gegeben durch

$$(18) \quad \begin{aligned} u_1^2 + u_4^2 &= \frac{X_1 + r}{2} & u_2^2 + u_3^2 &= \frac{-X_1 + r}{2} \\ u_2 &= \frac{X_2 u_1 + X_3 u_4}{X_1 + r} & \text{oder} & u_1 &= \frac{X_2 u_2 + X_3 u_3}{-X_1 + r} \\ u_3 &= \frac{X_3 u_1 - X_2 u_4}{X_1 + r} & u_4 &= \frac{X_3 u_3 - X_2 u_2}{-X_1 + r} \end{aligned}$$

Nebst dem besonderen Verhalten der KS-Transformation im Nullpunkt sind es vor allem ihre Konformitätseigenschaften, welche diese Abbildung zur Regularisierung der Keplerbewegung geeignet machen. Dies wird besonders an der Form des Ausdrucks in den u_k für die kinetische Energie deutlich. Dank der mit der Konformität von \mathcal{R} gleichbedeutenden Beziehung (17) lässt sich die kinetische Energie in den u_k wieder als Quadratsumme schreiben.

Daher soll auch zur Lösung von weiteren dreidimensionalen Regularisierungsproblemen an der Konformität der Abbildungen (im Sinne der KS-Transformation) festgehalten werden.

1.2. Inversionen

Um weitere konforme Abbildungen vom Typus der KS-Transformation zu konstruieren, schicken wir einige Bemerkungen über vollständig konforme Abbildungen in höher dimensionalen Räumen voraus.

Nach dem Satz von Liouville sind im n-dimensionalen Raum ($n > 2$) die Elemente der durch die Translationen, die Rotationen und die Spiegelungen an n-dimensionalen Sphären erzeugten Transformationsgruppe G^n die einzigen konformen Abbildungen²⁾.

In dieser Arbeit werden keine Rotationen gebraucht. Wir beschränken uns deshalb auf die Diskussion der Transformationen aus einer Untergruppe von G^n . Die Elemente der Untergruppe werden hier Inversionen genannt.

Sei $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ein variabler, $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ein fester Punkt im n-dimensionalen euklidischen Raum R^n ($n = 2, 3, \dots$), ebenso sei $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$ ein variabler, $\underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ ein fester Punkt im euklidischen Raum T^n . Eine Inversion \mathcal{Y}^n von R^n nach T^n ist gegeben durch die Gleichungen

$$(19) \quad y_k - \beta_k = a^2 \frac{x_k - \alpha_k}{\Delta^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

wobei

$$(20) \quad \Delta^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \alpha_i)^2$$

ist. a heisst der Radius, $\underline{\alpha}$ das Zentrum der Inversion \mathcal{Y}^n .

2) Die Spiegelungen an den n-dimensionalen Sphären kehren die Orientierung um. Wir gehen hier aber nicht näher darauf ein, da dieser Effekt später durch die Zusammensetzung von zwei Spiegelungen aufgehoben wird.

Als Bildpunkt von $\underline{x} = \underline{\alpha}$ führen wir in T^n den unendlich fernen Punkt ein. Für $n = 2$ ist der so erweiterte Raum die Riemannsche Zahlenkugel. Die Raumstruktur (bezüglich Winkelmessung) im unendlich fernen Punkt wird als Abbild der Struktur im Zentrum $\underline{x} = \underline{\alpha}$ bei der Inversion (19) definiert. Ebenso führen wir in R^n den unendlich fernen Punkt ein; dieser wird durch \mathcal{Y}^n auf den Punkt $\underline{y} = \underline{\beta}$ abgebildet.

Aus (19) folgt sofort

$$(21) \quad \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - \beta_k)^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - \alpha_k)^2} = a^2,$$

weshalb die Inversionen auch Abbildungen durch reziproke Radien genannt werden. Die Umkehrabbildung von \mathcal{Y}^n ergibt sich nun zu

$$(22) \quad x_k - \alpha_k = a^2 \frac{y_k - \beta_k}{\sum_{l=1}^n (y_l - \beta_l)^2}, \quad k = 1, \dots, n,$$

was formal mit (19) übereinstimmt.

Bezeichnet $\mathcal{Y}^n \underline{x} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ den Bildpunkt des Nullpunktes von R^n bei \mathcal{Y}^n ,

$$(23) \quad \gamma_k = \beta_k - a^2 \frac{\alpha_k}{\sum_{l=1}^n \alpha_l^2}, \quad k = 1, \dots, n,$$

so gilt die Beziehung

$$(24) \quad \frac{\sum_{k=1}^n (y_k - \gamma_k)^2}{\sum_{k=1}^n (y_k - \beta_k)^2} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{\sum_{k=1}^n \alpha_k^2},$$

die leicht durch Einsetzen von (23) und (19) auf der linken Seite bewiesen werden kann.

Die Inversionen \mathcal{Y}^n bilden die Klasse der k -dimensionalen Hypersphären und Hyperebenen ($k=1, 2, \dots, n-1$) in R^n auf dieselbe Klasse in T^n ab. Ein eleganter und verallgemeinerungsfähiger Beweis für $n=3$ ist in [4] zu finden.

Durch die Inversion \mathcal{Y}^n werden die Differentiale dx_ℓ gemäss der linearen Abbildung

$$(25) \quad dy_k = \sum_{\ell=1}^n a_{k\ell} dx_\ell, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

in die Differentiale dy_k transformiert. Die Koeffizienten

$$(26) \quad a_{k\ell} = \frac{\partial y_k}{\partial x_\ell} = \frac{a^*}{\Delta^*} \left[\Delta^* \delta_{k\ell} - 2(x_k - \alpha_k)(x_\ell - \alpha_\ell) \right]$$

($\delta_{k\ell}$ ist das Kronecker-Symbol) sind die Elemente der Funktionalmatrix $A = (a_{k\ell})$ der Inversion \mathcal{Y}^n .

Wegen der Konformität von \mathcal{Y}^n ist die Abbildung (25) eine Drehstreckung; die Matrix A ist somit verallgemeinert orthogonal. Zur Bestimmung ihrer Norm multiplizieren wir die Matrix A mit ihrer Transponierten und finden

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{k\ell} a_{k\rho} &= \\ \frac{a^{*2}}{\Delta^{*2}} \sum_{k=1}^n \left[\delta_{k\ell} - 2 \frac{x_k - \alpha_k}{\Delta} \cdot \frac{x_\ell - \alpha_\ell}{\Delta} \right] \left[\delta_{k\rho} - 2 \frac{x_k - \alpha_k}{\Delta} \cdot \frac{x_\rho - \alpha_\rho}{\Delta} \right] &= \\ \frac{a^{*2}}{\Delta^{*2}} \delta_{\ell\rho}, & \end{aligned}$$

woraus

$$(27) \quad N(A) = \frac{a^{*2}}{\Delta^{*2}}$$

folgt. Für das zur Transformation (19) gehörende Bogenelement findet man daraus

$$\sum_{k=1}^n dy_k^* = \frac{a^*}{\Delta^*} \sum_{\ell=1}^n dx_\ell^*,$$

wobei Δ durch (20) definiert ist.

1.3. Herleitung der B_3 -Transformation

Bedeutet \mathcal{I}_0^* die Inversion

$$(28) \quad u_k = \frac{\tilde{u}_k}{\tilde{u}_1^2 + \tilde{u}_2^2 + \tilde{u}_3^2 + \tilde{u}_4^2}, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

welche den Punkt $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{u}_4) \in \tilde{R}^4$ in den Punkt $(u_1, u_2, u_3, u_4) \in R^4$ überführt, und ist ferner \mathcal{I}_0^3 die Inversion

$$(29) \quad \tilde{x}_i = \frac{x_i}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad i = 1, 2, 3,$$

welche entsprechend den Punkt $(x_1, x_2, x_3) \in R^3$ in den Punkt $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \in \tilde{R}^3$ transformiert, so stimmt die Abbildung $\tilde{\mathcal{K}} (\tilde{R}^3 \rightarrow \tilde{R}^3)$, definiert durch das Schema

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \tilde{\mathcal{K}} & & & \\ & & & \overbrace{\hspace{10em}} & & & \\ \tilde{R}^3 & \xrightarrow{\mathcal{I}_0^*} & R^3 & \xrightarrow{\mathcal{K}} & R^3 & \xrightarrow{\mathcal{I}_0^3} & \tilde{R}^3 \end{array}$$

mit der KS-Transformation \mathcal{K} überein. Dies folgt durch Einsetzen von (1) und (28) in (29) unter Verwendung von (3).

Wir wollen daraus eine Folgerung ziehen. Die KS-Transformation ist winkeltreu (in der in 1.1. definierten Art) in fast allen Punkten des euklidischen Raumes R^4 . Nur im Nullpunkt werden gewisse Winkel verdoppelt; er ist ein "unkonformer Punkt" der KS-Transformation. Da die Inversionen \mathcal{I}_0^* und \mathcal{I}_0^3 Nullpunkt und unendlich fernen Punkt vertauschen, folgt aus der obigen Eigenschaft, dass der unendlich ferne Punkt von R^4 für $\tilde{\mathcal{K}}$ ein unkonformer Punkt vom Typus des Nullpunktes ist.

Wir wollen nun die KS-Transformation mit geeigneten Inversionen zusammensetzen, so dass die entstehende Abbildung zwei im Endlichen gelegene unkonforme Punkte hat. Auch deren Bildpunkte sollen im Endlichen liegen. Zu diesem Zweck führen wir zu den Räumen R^4 und R^3 , die ihre alte Bedeutung behalten, einen Original- oder Parameterraum S^4 und einen Bildraum (physikalischer Raum) S^3 ein. Der Originalraum S^4 soll zunächst durch eine Inversion \mathcal{I}^4 auf R^4 abgebildet werden, so dass die Punkte

$$(30) \quad \underline{z}_1 = (-c, 0, 0, 0), \quad \underline{z}_2 = (c, 0, 0, 0) \quad (c > 0),$$

in die wir die unkonformen Punkte verlegen wollen, in den Nullpunkt bzw. den unendlich fernen Punkt übergehen. Hernach wird R^4 durch die KS-Transformation auf den Raum R^3 abgebildet, welcher schliesslich durch die Inversion \mathcal{I}^3 so auf den physikalischen Raum S^3 abgebildet werden soll, dass der Nullpunkt bzw. der unendlich ferne Punkt in je eines der Zentren

$$(31) \quad \underline{z}_1^* = (c_1, 0, 0), \quad \underline{z}_2^* = (c_2, 0, 0) \quad (c_2 - c_1 = 2c)$$

übergeht.

Die Bedeutung der inskünftig verwendeten Symbole sei durch die folgende Tabelle erklärt:

	$\begin{array}{c} \mathcal{K} \quad B \\ \hline S^4 \longrightarrow R^4 \longrightarrow R^3 \longrightarrow S^3 \\ \mathcal{I}^4 \quad \mathcal{K} \quad \mathcal{I}^3 \\ I_4 \quad K \quad I_3 \\ \mathcal{V} = \{v_k\} \quad \mathcal{U} = \{u_k\} \quad \mathcal{X} = \{x_i\} \quad \mathcal{Y} = \{y_i\} \\ (k=1,2,3,4) \quad (i=1,2,3) \\ \underline{z}_1 = (-c, 0, 0, 0) \quad (0, 0, 0) \quad (0, 0, 0) \quad \underline{z}_1^* = (c_1, 0, 0) \\ \underline{z}_2 = (c, 0, 0, 0) \quad (\infty) \quad (\infty) \quad \underline{z}_2^* = (c_2, 0, 0) \end{array}$			
Raum	S^4	R^4	R^3	S^3
Abbildung	\mathcal{I}^4	\mathcal{K}	\mathcal{I}^3	
Funktionalmatrix	I_4	K	I_3	
allgemeiner Punkt	$\mathcal{V} = \{v_k\}$ ($k=1,2,3,4$)	$\mathcal{U} = \{u_k\}$	$\mathcal{X} = \{x_i\}$	$\mathcal{Y} = \{y_i\}$ ($i=1,2,3$)
unkonforme Punkte bzw. Zentren	$\underline{z}_1 = (-c, 0, 0, 0)$ $\underline{z}_2 = (c, 0, 0, 0)$	$(0, 0, 0)$ (∞)	$(0, 0, 0)$ (∞)	$\underline{z}_1^* = (c_1, 0, 0)$ $\underline{z}_2^* = (c_2, 0, 0)$

Die Inversion \mathcal{Y}^k hat nach (19) die Form

$$u_k - \beta_k = a^2 \frac{v_k - \alpha_k}{\sum_{l=1}^4 (v_l - \alpha_l)^2}, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Durch geeignete Wahl von $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$, a müssen die in vorstehender Tabelle dargestellten Korrespondenzen erfüllt werden. Das Zentrum $\underline{\alpha}$ von \mathcal{Y}^k ist der Punkt \underline{z}_2 , da dieser auf den unendlich fernen Punkt von R^4 abgebildet wird. Damit ergibt sich aus der Korrespondenz $(-c, 0, 0, 0) \longrightarrow (0, 0, 0, 0)$ das Resultat

$$\underline{\beta} = \left(\frac{a^2}{2c}, 0, 0, 0 \right).$$

Den Radius der Inversion \mathcal{Y}^k legen wir fest durch die Normierung $\beta_1 = 1$. Somit lauten die Gleichungen von \mathcal{Y}^k

$$(32) \quad \begin{aligned} u_1 &= 1 + 2c \frac{v_1 - c}{(v_1 - c)^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2} \\ u_k &= 2c \frac{v_k}{(v_1 - c)^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2}, \quad k = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$(33) \quad \begin{aligned} r_u^2 &= (u_1 - 1)^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \\ r_v^2 &= (v_1 - c)^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 \end{aligned}$$

folgt jetzt aus (21) die Beziehung

$$(34) \quad r_u^2 \cdot r_v^2 = 4c^2.$$

Da $\underline{\beta} = (1, 0, 0, 0)$ bei \mathcal{Y}^k Bild des unendlich fernen Punktes von S^4 ist, können wir die vorstehende Tabelle durch die folgende Reihe entsprechender Punkte ergänzen:

$$\begin{array}{ccccccc} S^4 & \longrightarrow & R^4 & \longrightarrow & R^3 & \longrightarrow & S^3 \\ (\infty) & & (1, 0, 0, 0) & & (1, 0) & & (\infty) \end{array}$$

Darin steckt die Forderung, dass der unendlich ferne Punkt von S^4 durch \mathcal{L} auf den unendlich fernen Punkt von S^3 abgebildet werden soll.

Auf analoge Weise können nun für die Inversion \mathcal{I}^3 die Gleichungen

$$(35) \quad y_1 = c_1 + 2c \frac{x_1 - 1}{(x_1 - 1)^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$y_i = 2c \frac{x_i}{(x_1 - 1)^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad i=2,3$$

aufgestellt werden. Hier führen wir die Abkürzungen

$$(36) \quad \begin{aligned} r_y^2 &= r_x^2 = (y_1 - c_1)^2 + y_2^2 + y_3^2 \\ r_x^2 &= (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{aligned}$$

ein, mit denen nach (21)

$$(37) \quad r_y^2 r_x^2 = 4c^2$$

gilt.

Die Transformation, welche S^4 direkt auf S^3 abbildet, werde mit \mathcal{L} bezeichnet; sie entsteht durch Zusammensetzung von \mathcal{I}^4 , \mathcal{K} , \mathcal{I}^3 :

$$(38) \quad \mathcal{Y} = \mathcal{I}^3 \mathcal{K} \mathcal{I}^4 \mathcal{X} = \mathcal{L} \mathcal{X}.$$

Wir nennen \mathcal{L} die dreidimensionale Birkhoff-Transformation³⁾ oder kurz B_3 -Transformation. Sie ist konform von der Art der KS-Transformation, wie die folgende einfache Ueberlegung zeigt:

3) Die dreidimensionale Birkhoff-Transformation ist erstmals in [5] erwähnt worden.

Wir betrachten die zu den Fasern von R^4 orthogonalen dreidimensionalen Teilräume; sie werden nach 1.1. durch \mathcal{R} winkeltreu auf R^3 abgebildet (den Nullpunkt und den unendlich fernen Punkt von R^4 muss man ausschliessen). Die Urbilder (in S^4) von diesen dreidimensionalen Teilräumen bei der Inversion \mathcal{J}^4 werden wegen der Konformität von \mathcal{J}^4 ebenfalls winkeltreu auf R^3 abgebildet. Da auch \mathcal{J}^3 konform ist, werden also die oben genannten Urbilder in S^4 durch \mathcal{L} winkeltreu auf S^3 abgebildet.

Eine Ausnahme bilden die unkonformen Punkte $\underline{z}_1, \underline{z}_2$, in denen sich die B_3 -Transformation verhält wie die KS-Transformation im Nullpunkt. Darauf wollen wir am Ende dieses Abschnittes etwas genauer eingehen.

Durch Einsetzen von (1) und (32) in (35) erhält man nach einiger Rechnung die Abbildungsgleichungen der B_3 -Transformation:

$$(39) \quad \begin{aligned} y_1 &= \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{1}{2} \left(v_1 + \frac{v_1(v_1^2 + c^2)}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right) \\ y_2 &= \frac{1}{2} \left(v_2 + \frac{v_2(v_1^2 - c^2) - 2c v_1 v_3}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right) \\ y_3 &= \frac{1}{2} \left(v_3 + \frac{v_3(v_1^2 - c^2) + 2c v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right). \end{aligned}$$

(39) kann als Fortsetzung der ebenen Birkhoff-Transformation [6] angesehen werden, denn die v_1, v_2 -Ebene wird durch (39) auf die y_1, y_2 -Ebene abgebildet, und mit $v = v_1 + i v_2$, $y = y_1 + i y_2$ lautet dann das Transformationsgesetz

$$(40) \quad y = \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{1}{2} \left(v + \frac{c^2}{v} \right),$$

was genau der als Birkhoff-Transformation bekannten konformen Abbildung entspricht.

Wie bei der KS-Transformation haben auch bei der B_3 -Transformation viele Punkte des Originalraumes denselben Bildpunkt. Lediglich die beiden Zentren \underline{z}_1^* , \underline{z}_2^* haben nur je einen Urbildpunkt in S^4 , wie aus der entsprechenden Eigenschaft der KS-Transformation (siehe 1.1.) folgt.

Es werden auch mehrere Punkte von S^4 ins unendliche von S^3 abgebildet, nämlich alle Punkte der v_4 -Achse $v_1=v_2=v_3=0$, wie (39) vermuten lässt. Tatsächlich bildet die Inversion \mathcal{Y}^* (32) die v_4 -Achse auf den Kreis

$$u_1^2 + u_4^2 = 1, \quad u_2 = u_3 = 0$$

ab; dieser geht durch die KS-Transformation (1) in den Punkt $(1, 0, 0)$ über, welcher seinerseits durch die Inversion \mathcal{Y}^* auf den unendlich fernen Punkt von S^3 abgebildet wird. Die v_4 -Achse ist also eine "Singularität" im Parameterraum S^4 .

Um die B_3 -Transformation in den unkonformen Punkten zu untersuchen, entwickeln wir die Abbildungsgleichungen (39) in den Punkten (30) in Potenzreihen. Damit die beiden unkonformen Punkte gleichzeitig behandelt werden können, führen wir das Vorzeichen $\sigma = \pm 1$ ein und die Relativkoordinaten \bar{v}_k, \bar{y}_i durch die Definitionen

$$(41) \quad \begin{aligned} v_4 &= \sigma(\bar{v}_4 + c) & v_k &= \bar{v}_k, & k &= 2, 3, 4 \\ y_1 &= \sigma(\bar{y}_1 + c) + \frac{c_1 + c_2}{2}, & y_i &= \bar{y}_i, & i &= 2, 3. \end{aligned}$$

$\bar{v}_k = 0$ ($k = 1, \dots, 4$) entspricht für $\sigma = -1$ dem Punkt $\underline{z}_1 = (-c, 0, 0, 0)$, für $\sigma = 1$ dem Punkt $\underline{z}_2 = (c, 0, 0, 0)$. Im Fall $\sigma = -1$ zeigt die positive \bar{v}_1 - bzw. \bar{y}_1 -Achse in die zur v_4 - bzw. y_1 -Achse entgegengesetzte Richtung.

Die gesuchten Entwicklungen erweisen sich als unabhängig von σ ; ihre Anfänge lauten

$$\begin{aligned}
 \bar{y}_1 &= \frac{1}{2c} (\bar{v}_1^2 - \bar{v}_2^2 - \bar{v}_3^2 + \bar{v}_4^2) - \frac{\bar{v}_2}{2c^2} (\bar{v}_1^2 - 3\bar{v}_2^2 - 3\bar{v}_3^2 + \bar{v}_4^2) + \dots \\
 (42) \quad \bar{y}_2 &= \frac{1}{c} (\bar{v}_1 \bar{v}_2 - \bar{v}_3 \bar{v}_4) - \frac{\bar{v}_2}{2c^2} (3\bar{v}_1^2 - \bar{v}_2^2 - \bar{v}_3^2 - \bar{v}_4^2) + \frac{1}{c} \bar{v}_1 \bar{v}_3 \bar{v}_4 + \dots \\
 \bar{y}_3 &= \frac{1}{c} (\bar{v}_1 \bar{v}_3 + \bar{v}_2 \bar{v}_4) - \frac{\bar{v}_3}{2c^2} (3\bar{v}_1^2 - \bar{v}_2^2 - \bar{v}_3^2 - \bar{v}_4^2) - \frac{1}{c} \bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_4 + \dots
 \end{aligned}$$

Die Glieder zweiten Grades stimmen bis auf einen gemeinsamen Faktor mit den entsprechenden Termen von (1) überein. Im Punkt \underline{z}_2 verhält sich also die B_3 -Transformation genau wie die KS-Transformation im Nullpunkt. In \underline{z}_1 zeigt sie ebenfalls dieses Verhalten, wenn die durch (41) mit $\sigma = -1$ definierten Relativkoordinaten negativer Orientierung benützt werden.

1.4. Die inverse Transformation

Der Punkt $\underline{v}_0 = (v_{1,0}, v_{2,0}, v_{3,0}, v_{4,0}) \in S^*$ habe bei der B_3 -Transformation \mathcal{B} den Bildpunkt $\underline{y}_0 \in S^3$. Die Menge der Punkte $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in S^*$, welche durch \mathcal{B} ebenfalls auf \underline{y}_0 abgebildet werden, d.h. das "Urbild" von \underline{y}_0 in S^4 , nennen wir die durch den Punkt \underline{v}_0 gehende Faser von S^4 .

Da die B_3 -Transformation eindeutig ist, haben zwei verschiedene Fasern keinen Punkt gemeinsam. Andererseits geht durch jeden Punkt von S^4 eine Faser, denn jeder Punkt von S^4 hat einen Bildpunkt in S^3 (S^3 ist durch den unendlich fernen Punkt abgeschlossen).

Es gibt Fasern, die nur aus einem Punkt bestehen: die beiden unkonformen Punkte $\underline{e}_1, \underline{e}_2$. Eine andere spezielle Faser ist die v_4 -Achse; alle ihre Punkte werden auf den unendlich fernen Punkt von S^3 abgebildet.

Um weitere Aussagen über die Fasern in S^4 zu machen, greifen wir auf die in 1.1. definierten Fasern in R^4 zurück (Kurven in R^4 , welche durch die KS-Transformation \mathcal{K} auf einen einzigen Punkt von R^3 abgebildet werden).

Zunächst zeigt die Gleichung (7), dass die automorphen Transformationen \mathcal{M}_p des Raumes R^4 euklidische Drehungen um den Nullpunkt sind. Deshalb sind die Fasern in R^4 Kreise um den Nullpunkt.

Die Fasern in S^4 sind die Urbilder der Fasern in R^4 bei der Inversion \mathcal{Y}^* , sind also Kreise oder Gerade. Da alle Geraden von S^4 durch den unendlich fernen Punkt gehen, kann höchstens eine der Fasern eine Gerade sein. Ausser der v_4 -Achse sind somit sämtliche Fasern Kreise (eventuell Nullkreise).

Die Abbildungen des Raumes S^4 auf sich, welche jede Faser in sich überführen, heissen automorphe Transformationen in S^4 und werden mit \mathcal{E}_p bezeichnet. Sie lassen sich einfach auf \mathcal{M}_p zurückführen.

Dazu führen wir die Bildpunkte $\underline{u}_0, \underline{u} \in R^*$ von $\underline{v}_0, \underline{v} \in S^*$ bei der Inversion \mathcal{I}^* ein, und wir können schreiben

$$(43) \quad \underline{u}_0 = \mathcal{I}^* \underline{v}_0, \quad \underline{v} = (\mathcal{I}^*)^{-1} \underline{u}.$$

Geht \underline{v} aus \underline{v}_0 durch eine automorphe Transformation \mathcal{E}_φ hervor, so geht \underline{u} aus \underline{u}_0 durch eine automorphe Transformation \mathcal{R}_φ hervor,

$$\underline{u} = \mathcal{R}_\varphi \underline{u}_0.$$

Daraus folgt mit (43)

$$(44) \quad \underline{v} = \mathcal{E}_\varphi \underline{v}_0 = (\mathcal{I}^*)^{-1} \mathcal{R}_\varphi \mathcal{I}^* \underline{v}_0.$$

Die Transformationen \mathcal{E}_φ bilden analog zu \mathcal{R}_φ eine kontinuierliche, einparametrische Gruppe:

$$\mathcal{E}_\varphi \mathcal{E}_\psi = (\mathcal{I}^*)^{-1} \mathcal{R}_\varphi \mathcal{I}^* (\mathcal{I}^*)^{-1} \mathcal{R}_\psi \mathcal{I}^* = (\mathcal{I}^*)^{-1} \mathcal{R}_{\varphi+\psi} \mathcal{I}^* = \mathcal{E}_{\varphi+\psi}.$$

Um die Gleichungen von \mathcal{E}_φ zu finden, setzen wir gemäss (44) zunächst \mathcal{R}_φ mit \mathcal{I}^* zusammen und finden (durch Einsetzen von (32) in (7))

$$\begin{pmatrix} u_1 - 1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi - 1 \\ 0 \\ 0 \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + \frac{2c}{(v_0 - c)^2 + v_{2,0}^2 + v_{3,0}^2 + v_{4,0}^2} \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \varphi & 0 & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{4,0} - c \\ v_{2,0} \\ v_{3,0} \\ v_{4,0} \end{pmatrix}.$$

Dies wiederum kann sogleich in die Inversion $(\mathcal{I}^*)^{-1}$,

$$v_k = c + \frac{2c(u_1 - 1)}{(u_1 - 1)^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}$$

$$v_k = \frac{2c u_k}{(u_1 - 1)^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}, \quad k = 2, 3, 4,$$

eingesetzt werden, womit sich für die automorphen Transformationen \mathcal{E}_φ die Gleichungen

$$(45) \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \frac{c}{g} \begin{pmatrix} 2c v_{1,0} \\ 2c (v_{2,0} \cos \varphi + v_{3,0} \sin \varphi) \\ 2c (-v_{2,0} \sin \varphi + v_{3,0} \cos \varphi) \\ 2c v_{4,0} \cos \varphi + (v_{1,0}^2 + v_{2,0}^2 + v_{3,0}^2 + v_{4,0}^2 - c^2) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

ergeben. Der Nenner

$$(46) \quad g = (v_{1,0}^2 + v_{2,0}^2 + v_{3,0}^2 + v_{4,0}^2 + c^2) - (v_{1,0}^2 + v_{2,0}^2 + v_{3,0}^2 + v_{4,0}^2 - c^2) \cos \varphi + 2c v_{4,0} \sin \varphi$$

ist nie negativ; er kann nur verschwinden, wenn der Punkt \underline{v} auf der v_4 -Achse liegt ($v_{1,0} = v_{2,0} = v_{3,0} = 0$), wie eine einfache Rechnung zeigt.

Man kann \mathcal{E}_φ mit einer nichteuklidischen Drehung vergleichen; die Fasern sind die Bahnkurven der Punkte von S^4 bei diesen Bewegungen. (45) ist eine Parameterdarstellung der Faserkurven.

In der nun folgenden Diskussion der Fasern wird die v_4 -Achse immer ausgeschlossen, also $(v_{1,0}, v_{2,0}, v_{3,0}) \neq (0,0,0)$. Wir sprechen dann von Faserkreisen.

Zunächst formulieren wir den folgenden Satz:

Die Punkte auf einem Faserkreis mit extremalem Abstand von der v_4 -Achse liegen in der Hyperebene H mit der Gleichung $v_4 = 0$.

Zum Beweise bilden wir den Abstand d des Punktes \underline{v} von der v_4 -Achse,

$$(47) \quad d = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \frac{2c^2}{g} \sqrt{v_{1,0}^2 + v_{2,0}^2 + v_{3,0}^2},$$

und bemerken, dass seine Extrema mit jenen von g übereinstimmen ($g > 0$). In den Extrema von g gilt aber

$$(48) \quad 0 = \frac{dg}{d\varphi} \\ = 2c v_4 \cos \varphi + (v_{10}^2 + v_{20}^2 + v_{30}^2 + v_{40}^2 - c^2) \sin \varphi = \frac{g}{c} v_4 ,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Wenn $v_4(\varphi)$ in (45) nicht identisch verschwindet (d.h. wenn der durch \underline{v} gehende Faserkreis nicht ganz in H liegt), so hat $v_4(\varphi)$ in $0 \leq \varphi < 2\pi$ zwei reelle Nullstellen, die nach (48) und (47) mit den Extremalstellen von g (und d) übereinstimmen.

Die Umkehrung des vorstehenden Satzes, nämlich die Aussage, dass die Schnittpunkte eines Faserkreises mit der Hyperebene H extremalen Abstand von der v_4 -Achse haben, ist somit richtig, sofern nicht der ganze Faserkreis in H liegt.

Aus (46) und (47) kann man über die erwähnten zwei Extrema von d weitere Schlüsse ziehen: Ist d als Funktion von φ nicht konstant, so hat d in $0 \leq \varphi < 2\pi$ ein Maximum d_{max} und ein Minimum d_{min} . Die extremalen Werte g_{max} , g_{min} von g sind nach (46)

$$\left. \begin{matrix} g_{max} \\ g_{min} \end{matrix} \right\} = v_{10}^2 + v_{20}^2 + v_{30}^2 + v_{40}^2 + c^2 \pm \sqrt{(v_{10}^2 + v_{20}^2 + v_{30}^2 + v_{40}^2 - c^2)^2 + 4c^2 v_{40}^2} ,$$

woraus durch Multiplikation

$$g_{max} \cdot g_{min} = 4c^2 (v_{10}^2 + v_{20}^2 + v_{30}^2)$$

folgt. Damit ergibt sich die schöne Beziehung

$$(49) \quad d_{max} \cdot d_{min} = c^2$$

Zur Diskussion der ganz in der Hyperebene H liegenden Faserkreise bemerken wir, dass dieser Fall gemäss (45) genau dann eintritt, wenn

$$(50) \quad v_{4,0} = 0, \quad v_{1,0}^2 + v_{2,0}^2 + v_{3,0}^2 = c^2$$

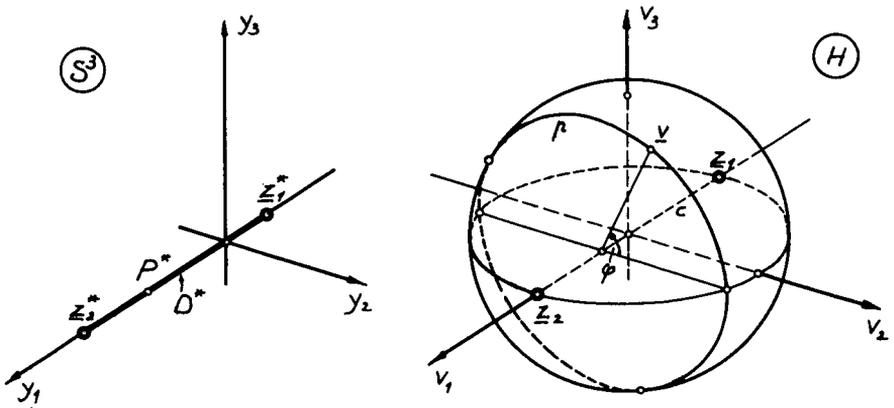
ist. Dann haben die Punkte \underline{v} der durch \underline{v}_0 gehenden Faser ρ die Koordinaten

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1,0} \\ v_{2,0} \cos \varphi + v_{3,0} \sin \varphi \\ -v_{2,0} \sin \varphi + v_{3,0} \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h. sie liegen alle auf der zweidimensionalen Kugel

$$(51) \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = c^2, \quad v_4 = 0$$

und haben somit alle denselben Abstand c von der v_4 -Achse ($d = \text{konst.}$). Das Bild P^* der Faser ρ ist der Punkt $(v_{1,0}, 0, 0)$ in S^3 , also ein Punkt auf der abgeschlossenen Strecke D^* zwischen den beiden Zentren. Damit beherrschen wir die Umkehrabbildung der B_3 -Transformation für die Punkte von D^* .



Nun sei ein Punkt $y = (y_1, y_2, y_3)$ im Endlichen von S^3 und ausserhalb der Strecke D^* gegeben. Um die zu y gehörende Faser ρ zu bestimmen, genügt es, einen ihrer Punkte (y_0) zu ermitteln; (45) erlaubt dann die Berechnung aller Punkte der Faser ρ .

Besonders einfach wird die Berechnung der in der Hyperebene H gelegenen Punkte von ρ . Wir setzen daher

$$(52) \quad y_0 = (w_1, w_2, w_3, 0)$$

und verlangen, dass y_0 durch die B_3 -Transformation auf y abgebildet wird. Mit (39) ergeben sich so die Gleichungen

$$(53) \quad \begin{aligned} y_1 &= \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{w_1}{2} \left(1 + \frac{c^2}{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2} \right) \\ y_i &= \frac{w_i}{2} \left(1 - \frac{c^2}{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2} \right), \quad i = 2, 3 \end{aligned}$$

zur Bestimmung von w_1, w_2, w_3 . Durch die Einführung der Polarkoordinaten Y, ϑ in der y_2, y_3 -Ebene und W, ω in der w_2, w_3 -Ebene mittels der Gleichungen

$$(54) \quad \begin{aligned} y_2 &= Y \cos \vartheta & w_2 &= W \cos \omega \\ y_3 &= Y \sin \vartheta & w_3 &= W \sin \omega \end{aligned}$$

lässt sich (53) schreiben als

$$(55) \quad y_1 = \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{w_1}{2} \left(1 + \frac{c^2}{w_1^2 + W^2} \right), \quad Y = \frac{W}{2} \left(1 - \frac{c^2}{w_1^2 + W^2} \right),$$

$$(56) \quad \vartheta = \omega,$$

was genau der ebenen Birkhoff-Transformation (vgl. (40)!) von der w_1, W -Ebene in die y_1, Y -Ebene entspricht.

Durch die B_3 -Transformation wird jede durch die unkonformen Punkte gehende, in der Hyperebene $v_4 = 0$ gelegene zweidimensionale Ebene gemäss der zweidimensionalen Birkhoff-Transformation auf eine Ebene von S^3 abgebildet.

Bevor wir (55) nach w_1, W auflösen, führen wir die Abstände r_1, r_2 des Punktes \mathcal{Y} von den Zentren $\underline{z}_1^* = (c_1, 0, 0), \underline{z}_2^* = (c_2, 0, 0)$ ein:

$$(57) \quad \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(y_1 - c_1)^2 + y_2^2 + y_3^2} \\ r_2 &= \sqrt{(y_1 - c_2)^2 + y_2^2 + y_3^2} \end{aligned}$$

In den durch die B_3 -Transformation \mathcal{B} gegebenen Koordinaten v_k lassen sich r_1 und r_2 in sehr übersichtlicher Form darstellen; durch Einsetzen von (39) in (57) ergibt sich nach einiger Rechnung

$$(58) \quad \begin{aligned} r_1 &= \frac{(v_1 + c)^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2}{2\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \\ r_2 &= \frac{(v_1 - c)^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2}{2\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} \end{aligned}$$

Die Ausdrücke in den v_k zeichnen sich vor denjenigen in den y_i dadurch aus, dass die partiellen Ableitungen von r_1, r_2 nach v_k auch beim Verschwinden von r_1 oder r_2 noch stetig sind.

Für die Abstände des Bildpunktes $\mathcal{Y} = \mathcal{B}v_0$ von den Zentren (ausgedrückt durch w_1 und $W = (w_2^2 + w_3^2)^{1/2}$) findet man aus (58)

$$(59) \quad \left. \begin{aligned} r_1 \\ r_2 \end{aligned} \right\} = \frac{(w_1 \pm c)^2 + W^2}{2\sqrt{w_1^2 + W^2}}$$

Zur Auflösung von (55) nach w_1, W schreiben wir zuerst die Hilfsgrösse

$$(60) \quad \kappa = \frac{Y w_1}{\left(y_1 - \frac{c_1 + c_2}{2}\right) W} = \frac{w_1^2 + W^2 - c^2}{w_1^2 + W^2 + c^2}$$

mittels (59) als Funktion von r_1, r_2 . Man findet

$$(61) \quad r_1 + r_2 = \frac{w_1^2 + W^2 + c^2}{\sqrt{w_1^2 + W^2}}, \quad \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2} = \frac{w_1^2 + W^2 - c^2}{\sqrt{w_1^2 + W^2}};$$

somit wird

$$(62) \quad \kappa = \frac{\sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2}}{r_1 + r_2}.$$

κ ist in den hier zugelassenen Fällen immer reell und positiv, denn wegen $y \notin D^*$ gilt $r_1 + r_2 > 2c$. Mit der Definition (60) von κ bestätigt man jetzt leicht, dass

$$(63) \quad w_1 = \left(y_1 - \frac{c_1 + c_2}{2}\right)(1 + \kappa), \quad W = Y \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right)$$

eine der beiden Umkehrabbildungen zu (55) ist.

Wegen (54) und (56) gilt nun

$$(64) \quad w_1 = \left(y_1 - \frac{c_1 + c_2}{2}\right)(1 + \kappa), \quad w_2 = y_2 \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right), \quad w_3 = y_3 \left(1 + \frac{1}{\kappa}\right),$$

und aus (61) folgt ferner

$$(65) \quad \rho = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2} = \frac{1}{2} \left[r_1 + r_2 + \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4c^2} \right].$$

Da $r_1 + r_2 > 2c$ ist, folgt aus (65) $\rho > c$; aufgrund von (49) gilt somit $\rho = d_{\max}$. Die durch (62) und (64) definierten Grössen w_1, w_2, w_3 sind also Koordinaten des von der v_1 -Achse am weitesten entfernten Punktes der Faser ρ (äusserster Punkt).

Zusammenfassend können wir für die Rücktransformation des Punktes $\underline{y} \in S^3$ das folgende Verfahren angeben:

Liegt \underline{y} auf der Strecke D^* ($c_1 \leq y_1 \leq c_2, y_2 = y_3 = 0$), so sind nach (51)

$$\begin{aligned} v_1 &= y_1 - \frac{c_1 + c_2}{2} \\ v_2^2 + v_3^2 &= c^2 - \left(y_1 - \frac{c_1 + c_2}{2} \right)^2 \\ v_4 &= 0 \end{aligned}$$

die Gleichungen der Faser ρ , welche durch die B_3 -Transformation auf \underline{y} abgebildet wird. Im allgemeinen Fall $\underline{y} \notin D^*$ berechnet man zunächst r_1, r_2 aus (57). Mit der Grösse x aus (62) liefert (64) w_1, w_2, w_3 , womit der äusserste Punkt $(w_1, w_2, w_3, 0)$ der zu \underline{y} gehörenden Faser ρ bestimmt ist. Schliesslich ist mit der Abkürzung ρ aus (65)

$$(66) \quad \begin{pmatrix} v_1(\varphi) \\ v_2(\varphi) \\ v_3(\varphi) \\ v_4(\varphi) \end{pmatrix} = \frac{c}{(\rho^2 + c^2) - (\rho^2 - c^2) \cos \varphi} \begin{pmatrix} 2c w_1 \\ 2c (w_2 \cos \varphi + w_3 \sin \varphi) \\ 2c (-w_2 \sin \varphi + w_3 \cos \varphi) \\ (\rho^2 - c^2) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

eine Parameterdarstellung der Faser ρ (dies folgt aus (45) und (46)). Durchläuft φ in (66) das Intervall $0 \leq \varphi < 2\pi$, so durchläuft $\underline{v}(\varphi)$ alle Punkte der Faser ρ .

Für $\varphi = \pi$ liefert (66) den Punkt von ρ mit minimalem Abstand von der v_1 -Achse (innerster Punkt), denn die vierte Komponente $v_4(\pi)$ verschwindet:

$$\begin{pmatrix} v_1(\pi) \\ v_2(\pi) \\ v_3(\pi) \\ v_4(\pi) \end{pmatrix} = \frac{c^2}{\rho^2} \begin{pmatrix} w_1 \\ -w_2 \\ -w_3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

1.5. Die Transformation der Differentiale

Wir setzen hier die Ausführungen von Abschnitt 1.3. fort und untersuchen das Verhalten der B_3 -Transformation \mathcal{B} im Kleinen. Zu diesem Zweck ziehen wir wie früher die KS-Transformation und die Inversionen $\mathcal{J}^3, \mathcal{J}^4$ heran.

Die Inversion \mathcal{J}^k transformiert die Differentiale \underline{dv} nach der linearen Abbildungsvorschrift

$$(67) \quad \underline{du} = I_k \underline{dv}$$

in die Differentiale \underline{du} , wobei I_k die verallgemeinert orthogonale Matrix

$$(68) \quad (I_k)_{kl} = \frac{2c}{r^2} (r^2 \delta_{kl} - 2v_k v_l), \quad k, l = 1, 2, 3, 4$$

bedeutet (es wurden die Abkürzungen (33) und (41) für $\sigma = 1$ gebraucht). Die Funktionalmatrix I_3 der Inversion \mathcal{J}^3 ergänzen wir zu der 4-reihigen verallgemeinert orthogonalen Matrix

$$(69) \quad \tilde{I}_3 = \frac{2c}{r^2} \begin{pmatrix} r^2 - 2(x_1 - 1)^2 & -2(x_1 - 1)x_2 & -2(x_1 - 1)x_3 & 0 \\ -2(x_1 - 1)x_2 & r^2 - 2x_2^2 & -2x_2 x_3 & 0 \\ -2(x_1 - 1)x_3 & -2x_2 x_3 & r^2 - 2x_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix},$$

mit welcher dann die Transformationsgleichungen für \mathcal{J}^3 im Kleinen auch als

$$(70) \quad \begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ dy_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{I}_3 \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden können. Durch Einsetzen von (12) und (67) in (70) ergibt sich nun die Beziehung

$$(71) \quad \begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ dy_3 \\ 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} dv_1 \\ dv_2 \\ dv_3 \\ dv_4 \end{pmatrix},$$

welche die B_3 -Transformation \mathcal{B} im Kleinen darstellt. Die verallgemeinert orthogonale Matrix

$$(72) \quad B = (b_{ke}) = 2\tilde{I}_3 K I_4$$

ist die Funktionalmatrix von \mathcal{B} .

(71) ergibt in der untersten Komponente

$$0 = b_{41} dv_1 + b_{42} dv_2 + b_{43} dv_3 + b_{44} dv_4,$$

und dies ist die zur B_3 -Transformation gehörende Nebenbedingung. Um sie explizite aufzustellen, bietet sich der einfache Weg, die in 1.1. erwähnte Nebenbedingung der KS-Transformation der Inversion \mathcal{J}^4 zu unterwerfen.

Die vierte Zeile der rechten Seite von (12) enthält die Differentialform

$$(73) \quad \Gamma = 2(u_4 du_1 - u_3 du_2 + u_2 du_3 - u_1 du_4),$$

welche mit der schief symmetrischen Matrix

$$(74) \quad (\epsilon_{ke}) = \begin{pmatrix} & & & -1 \\ 0 & & & \\ & 1 & & \\ -1 & & & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$$

auch als

$$(75) \quad \Gamma = 2 \sum_{k,e=1}^4 u_k \epsilon_{ke} du_e$$

geschrieben werden kann. Der Uebergang zu v_k geschieht durch Einsetzen der Inversionsgleichungen (32),

$$u_1 = 1 + \frac{2C\bar{v}_1}{r^2}, \quad u_k = \frac{2C\bar{v}_k}{r^2}, \quad k=2,3,4,$$

(die Bezeichnungen wurden nach (68) erklärt) und (67) in (75):

$$\Gamma = -2 du_1 + \frac{8C^2}{r^6} \sum_{k,l,h=1}^4 \varepsilon_{khl} \bar{v}_k (r^2 d_{lh} - 2 \bar{v}_l \bar{v}_h) dv_h.$$

Aus der Antisymmetrie der Matrix (ε_{khl}) folgt

$$\sum_{k,l=1}^4 \varepsilon_{khl} \bar{v}_k \bar{v}_l = 0,$$

wodurch sich die Differentialform Γ auf

$$\Gamma = \frac{4C}{r^4} \sum_{h=1}^4 \left\{ 2 \bar{v}_h \bar{v}_h - r^2 d_{hh} + 2C \sum_{k=1}^4 \varepsilon_{kh} \bar{v}_k \right\} dv_h$$

reduziert. Für die Faktoren a_h von dv_h unter dem Summenzeichen findet man durch Ausrechnen

$$(76) \quad \begin{aligned} a_1 &= 2v_1v_4 & a_2 &= 2(v_2v_4 - Cv_3) \\ a_3 &= 2(v_3v_4 + Cv_2) & a_4 &= C^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 + v_4^2, \end{aligned}$$

womit die Differentialform Γ als

$$(77) \quad \Gamma = \frac{4C}{r^4} \sum_{h=1}^4 a_h dv_h$$

geschrieben werden kann. Um aus Γ die Elemente b_{4h} der vierten Zeile von B zu bekommen, müssen wir gemäß (70) die Koeffizienten von dv_h in (77) mit dem Element (4,4) der Matrix \tilde{I}_3 multiplizieren:

$$(78) \quad b_{4h} = \frac{8C^2}{r^4 r_k^2} a_h, \quad h=1,2,3,4$$

Der Faktor von a_h in (78) lässt sich mittels (37), (33) und (58) umformen:

$$(79) \quad \frac{8c^2}{v_1^2 v_2^2} = \frac{2v_4^2}{v_1^2} = \frac{1}{2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)},$$

womit (78) in

$$(80) \quad b_{4h} = \frac{a_h}{2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}, \quad h = 1, 2, 3, 4$$

übergeht.

Die nichtholonome Nebenbedingung kann nun durch eine der beiden Gleichungen

$$(81) \quad \sum_{h=1}^4 a_h dv_h = 0, \quad \sum_{h=1}^4 b_{4h} dv_h = 0$$

dargestellt werden.

Wir verzichten auf die Berechnung der übrigen Elemente von B auf dem eben beschrittenen Weg, da sie mit geringerem Aufwand durch partielle Differentiation der Gleichungen (39) ermittelt werden können. Es seien lediglich die Resultate angegeben:

$$(82) \quad \begin{array}{l|l} b_{11} & (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^2 + (v_4^2 + c^2)(-v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \\ b_{12} & -2 v_1 v_2 (v_4^2 + c^2) \\ b_{13} & -2 v_1 v_3 (v_4^2 + c^2) \\ b_{14} & 2 v_1 v_4 (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \\ \hline b_{21} & -2 v_1 [v_2 (v_4^2 - c^2) - 2 c v_3 v_4] \\ b_{22} & (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^2 + (v_4^2 - c^2)(v_1^2 - v_2^2 + v_3^2) + 4 c v_2 v_3 v_4 \\ b_{23} & -2 c v_4 (v_1^2 + v_2^2 - v_3^2) - 2 v_2 v_3 (v_4^2 - c^2) \\ b_{24} & 2 (v_2 v_4 - c v_3) (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \end{array}$$

gemeinsamer Nenner:
 $2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^2$

$$\begin{array}{l}
 b_{31} \left| \begin{array}{l} -2 v_1 [v_3 (v_4^2 - c^2) + 2 c v_2 v_4] \\ 2 c v_4 (v_1^2 - v_2^2 + v_3^2) - 2 v_2 v_3 (v_4^2 - c^2) \\ (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^2 + (v_4^2 - c^2)(v_1^2 + v_2^2 - v_3^2) - 4 c v_2 v_3 v_4 \\ 2 (v_3 v_4 + c v_2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \end{array} \right. \\
 b_{32} \\
 b_{33} \\
 b_{34} \\
 \text{(82)} \\
 b_{41} \left| \begin{array}{l} 2 v_1 v_4 (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \\ 2 (v_2 v_4 - c v_3)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \\ 2 (v_3 v_4 + c v_2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \\ (c^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 + v_4^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \end{array} \right. \\
 b_{42} \\
 b_{43} \\
 b_{44}
 \end{array}$$

Gemeinsamer Nenner:
 $2(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)^2$

In expliziter Form lautet die Nebenbedingung (81)

$$\text{(82a)} \quad 2 v_1 v_4 \cdot dv_1 + 2(v_2 v_4 - c v_3) dv_2 + 2(v_3 v_4 + c v_2) dv_3 + (c^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 + v_4^2) dv_4 = 0 .$$

Aufgrund der Normenproduktregel (27) gilt wegen (72) für die Norm von B :

$$\begin{aligned}
 N(B) &= 4 N(\tilde{I}_3) \cdot N(K) \cdot N(I_4) \\
 &= \frac{4 c^2}{r_1^2} \cdot 4(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2) \cdot \frac{4 c^2}{r_4^2} ,
 \end{aligned}$$

was durch Umformung mittels (79) und (37) in

$$\text{(83)} \quad N(B) = \frac{r_2^2 (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2)}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

übergeht. Die Anwendung der Beziehung (24) auf die Inversion \mathcal{Y}^3 liefert ferner

$$\text{(84)} \quad \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 .$$

Einsetzen von (84) in (83) ergibt schliesslich

$$N(B) = \frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} ,$$

$$(85) \quad BB^T = \frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} E .$$

Indem wir nun die Matrixgleichung (71) von links mit ihrer Transponierten multiplizieren, finden wir unter Verwendung von (85) die wichtige Beziehung für das Bogenelement ds :

$$(86) \quad ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 = \frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} (dv_1^2 + dv_2^2 + dv_3^2 + dv_4^2)$$

Das Ergebnis, dass in dieser Metrik keine gemischten Glieder auftreten und die Quadrate denselben Faktor aufweisen, war zu erwarten, weil alle betrachteten Abbildungen konform sind, falls die Nebenbedingung erfüllt ist.

In (86) muss man unter r_1, r_2 Abkürzungen für die in (58) definierten Ausdrücke in den v_k verstehen.

Da die Matrix B regulär ist, lassen sich die Linearformen (71) umkehren:

$$(87) \quad \begin{pmatrix} dv_1 \\ dv_2 \\ dv_3 \\ dv_4 \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ dy_3 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die nach (87) aus dy_i berechneten Differentiale dv_k erfüllen die Nebenbedingung, wie die Multiplikation von (87) mit B (von links) zeigt.

Aus (85) folgt

$$(88) \quad B^{-1} = \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{r_1 r_2} B^T ,$$

womit (87) definitiv als

$$(89) \quad dv_k = \frac{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}{r_1 r_2} \sum_{i=1}^3 b_{ik} dy_i, \quad k=1,2,3,4$$

geschrieben werden kann.

1.6. Geometrische Eigenschaften

Da die B_3 -Transformation durch Zusammensetzung der KS-Transformation mit Inversionen entsteht, haben die beiden Transformationen weitgehend dieselben Konformitätseigenschaften. Diese wurden schon in 1.1. kurz erwähnt [2]; jetzt sollen sie noch etwas ausführlicher gestreift werden.

Sei $\underline{x} \neq \underline{z}_1, \underline{z}_2$ ein Punkt im Raum S^4 und $V^4(\underline{x})$ der lineare Raum der von \underline{x} ausgehenden Vektoren $d\underline{x}$. \underline{y} sei der Bildpunkt von \underline{x} bei der B_3 -Transformation \mathcal{B} und $Y^3(\underline{y})$ der lineare Raum der von \underline{y} ausgehenden Vektoren $d\underline{y}$. Im weiteren bezeichnen wir mit $V^3(\underline{x}) \subset V^4(\underline{x})$ denjenigen Teilraum von $V^4(\underline{x})$, welcher alle die Nebenbedingung (82a) erfüllenden Vektoren $d\underline{x}$ enthält.

Die Nebenbedingung verlangt, dass $d\underline{x}$ zu dem durch (76) gegebenen Vektor

$$\underline{\alpha}(\underline{x}) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$$

orthogonal steht (um die Abhängigkeit vom Ort in S^4 zu verdeutlichen, setzen wir \underline{x} als Argument hinter einige Symbole). $V^3(\underline{x})$ ist somit das orthogonale Komplement bezüglich $V^4(\underline{x})$ des durch $\underline{\alpha}(\underline{x})$ gegebenen eindimensionalen Vektorraumes $A^1(\underline{x})$.

Die B_3 -Transformation im Kleinen (71) beschreibt nun eine lineare Abbildung \mathcal{P} von $V^4(\underline{x})$ auf $Y^3(\underline{y})$. Der Kern von \mathcal{P} (Unterraum von $V^4(\underline{x})$, welcher auf den Nullvektor abgebildet wird) ist der Vektorraum $A^1(\underline{x})$, was sofort aus der vierten Komponente der Gleichung (71) folgt.

Die zwei Nachbarpunkte \underline{x} , $\underline{x} + \underline{\alpha}(\underline{x}) d\tau$ in S^4 werden durch die B_3 -Transformation auf denselben Punkt abgebildet, da der Zuwachs $\underline{\alpha}(\underline{x}) d\tau$ im Kern von \mathcal{P} liegt. Somit ist der Vektor $\underline{\alpha}(\underline{x})$ stets tangential an die durch \underline{x} gehende Faser.

Die Abbildung \mathcal{F} kann man sich zusammengesetzt denken aus einer Drehstreckung (Multiplikation von $d\tilde{v}$ mit der verallgemeinert orthogonalen Matrix B) und einer anschliessenden Projektion (Nullsetzen der vierten Komponente). Die Vektoren $d\tilde{v} \in V^3(\underline{v})$ haben nun aufgrund der Definition von $V^3(\underline{v})$ die Eigenschaft, dass sie durch die Drehstreckung allein schon in Vektoren von $Y^3(\underline{y})$ (mit verschwindender vierter Komponente) übergeführt werden. Somit wird der Raum $V^3(\underline{v})$ durch die B_3 -Transformation winkeltreu auf den Raum $Y^3(\underline{y})$ abgebildet. Dies impliziert natürlich, dass jeder zweidimensionale Teilraum von $V^3(\underline{v})$ winkeltreu auf einen zweidimensionalen Teilraum von $Y^3(\underline{y})$ abgebildet wird.

Zusammenfassend können wir auch hier den in [2] für die KS-Transformation formulierten Satz aussprechen:

Die zu den Fasern (66) orthogonalen dreidimensionalen Flächenelemente in S^4 werden durch die B_3 -Transformation winkeltreu in den Raum S^3 abgebildet.

Es taucht nun sofort die Frage auf, ob es drei- oder zweidimensionale Flächen oder wenigstens Kurven in S^4 gibt, bei denen für jeden Punkt \underline{v} der zugehörige Tangentialraum in $V^3(\underline{v})$ liegt.

Für die dreidimensionalen Flächen muss die Frage negativ beantwortet werden, wie sogleich gezeigt werden soll. Dies hängt natürlich damit zusammen, dass die Nebenbedingung (82a) nicht-holonom ist.

Die Gleichung der gesuchten Hyperfläche sei als

$$(90) \quad F(v_1, v_2, v_3, v_4) = \text{konst.}$$

angesetzt. $\partial F / \partial v_k$ ($k=1, 2, 3, 4$) sind dann die Komponenten der Flächennormalen, welche zum Vektor $\underline{a}(\underline{v})$ parallel sein muss, damit alle Tangentialvektoren der Hyperfläche die Nebenbedingung erfüllen. Es muss also

$$(91) \quad \frac{\partial F}{\partial v_k} = \lambda (v_1, v_2, v_3, v_4) \cdot a_k, \quad k=1, 2, 3, 4$$

gelten mit einem von Null verschiedenen Proportionalitätsfaktor λ und den in (76) definierten Koeffizienten a_k . Um die möglichen Lösungen des Systems (91) etwas einzuschränken, wollen wir drei der sechs Integrabilitätsbedingungen

$$(92) \quad \frac{\partial}{\partial v_l} \frac{\partial F}{\partial v_k} = \frac{\partial}{\partial v_k} \frac{\partial F}{\partial v_l}, \quad k, l=1, 2, 3, 4, \quad k \neq l$$

heranziehen. Aus den Gleichungen für $k=1, l=2$ bzw. $k=1, l=3$ folgt durch Elimination von $\partial \lambda / \partial v_1$

$$(93) \quad a_1 \left(a_2 \frac{\partial \lambda}{\partial v_3} - a_3 \frac{\partial \lambda}{\partial v_2} \right) = 0.$$

Andrerseits lautet die Integrabilitätsbedingung für $k=2, l=3$

$$(94) \quad a_2 \frac{\partial \lambda}{\partial v_3} - a_3 \frac{\partial \lambda}{\partial v_2} = 4c\lambda.$$

Da $\lambda \neq 0$ und $c \neq 0$ (siehe (30)!) gilt, kann die linke Seite von (94) nicht verschwinden. Wegen $a_1 = 2v_1 v_4$ folgt nun aus (93) $v_1 = 0$ oder $v_4 = 0$. Man überzeugt sich leicht davon, dass keine dieser beiden Flächen unser ursprüngliches Problem löst. Die dreidimensionalen Flächenelemente $V^3(\underline{x})$ lassen sich also nicht zu Hyperflächen integrieren; sie sind "stachlig" in S^4 angeordnet.

Die Frage der zweidimensionalen Flächen, bei denen jeder Tangentialvektor die Nebenbedingung erfüllt, soll hier nicht vollständig diskutiert werden. Dass solche Flächen existieren, sahen wir im Abschnitt 1.4.: Es sind die Ebenen in $v_4 = 0$, welche durch die beiden unkonformen Punkte, d.h. durch die v_1 -Achse gehen.

Die Gleichungen einer solchen Ebene G sind

$$v_2 = v_0 \cos \omega, \quad v_3 = v_0 \sin \omega, \quad v_4 = 0 \quad (v_0 \text{ beliebig})$$

mit der Konstanten ω und den Parametern v_0, v_1 . Die Nebenbedingung (82a) in den Punkten von G heisst

$$-2c v_0 \sin \omega dv_2 + 2c v_0 \cos \omega dv_3 + (c^2 - v_0^2 - v_1^2) dv_4 = 0,$$

sie wird für alle Werte der Parameter v_0, v_1 von den beiden linear unabhängigen Vektoren

$$\underline{dv} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{dv} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \omega \\ \sin \omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt, welche tatsächlich in der Ebene G liegen. Somit erfüllt jeder Vektor von G die Nebenbedingung.

Alle Faserkurven, welche die Ebenen G schneiden, schneiden sie unter rechtem Winkel. Wir finden somit bestätigt, dass die Ebenen G durch die B_3 -Transformation mit Ausnahme der unkonformen Punkte $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ konform auf Flächen von S^3 abgebildet werden.

Wenden wir uns nun den Kurven zu, deren sämtliche Tangentialvektoren die Nebenbedingung erfüllen! Wir bemerken zunächst, dass differenzierbare Kurven, die ganz auf Flächen der oben diskutierten Art verlaufen, in trivialer Weise die verlangte Eigenschaft haben.

Es lässt sich sogar zu jedem stetig differenzierbaren Kurvenbogen C^* in S^3 , welcher die Zentren meidet, ein Kurvenbogen C in S^4 so angeben, dass C durch \mathcal{L} auf C^* abgebildet wird und dass alle Tangentialvektoren von C die Nebenbedingung erfüllen.

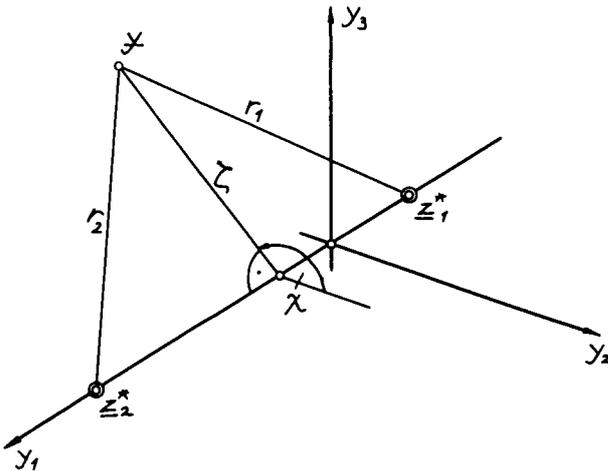
Wir wollen dies hier durch eine explizite Konstruktion von C einsehen. Zu diesem Zweck verwenden wir in S^3 räumliche elliptische Koordinaten. Dadurch können wir aber nur solche Kurvenbogen C^* zulassen, welche die y_1 -Achse nicht schneiden. Wir verzichten darauf, die Gültigkeit der obigen Aussage auch für die y_1 -Achse schneidende Kurven zu zeigen, da später die Korrespondenz von Kurven in S^3 und S^4 mittels Differentialgleichungen allgemein behandelt wird.

Die elliptischen Koordinaten ξ, η, χ des Punktes $\mathcal{P} = (y_1, y_2, y_3)$ bezüglich der Zentren $\underline{z}_1^* = (c_1, 0, 0)$, $\underline{z}_2^* = (c_2, 0, 0)$ ($c_2 - c_1 = 2C$) sind definiert durch

$$(95) \quad \begin{aligned} \xi &= \frac{r_1 + r_2}{2} & (\xi \geq c) , \\ \eta &= \frac{r_1 - r_2}{2} & (|\eta| \leq c) \end{aligned}$$

und

$$(96) \quad \zeta e^{i\chi} = y_2 + iy_3 .$$



r_1, r_2 sind die in Gleichung (57) definierten Abstände des Punktes \mathcal{X} von den Zentren, und ζ, χ sind Radiusvektor und Polarwinkel in der Projektion auf die y_2, y_3 -Ebene.

Zur Berechnung der cartesischen Koordinaten y_1, y_2, y_3 aus den elliptischen ξ, η, χ bestimmt man sich zunächst die Hilfsgrößen

$$(97) \quad \xi^* = \sqrt{\xi^2 - c^2}, \quad \eta^* = \sqrt{c^2 - \eta^2};$$

dann können die leicht zu verifizierenden Beziehungen

$$(98) \quad c \left(y_1 - \frac{c_1 + c_2}{2} \right) = \xi \eta, \quad c \zeta = \xi^* \eta^*$$

und die Gleichung (96) verwendet werden.

Die am Ende von 1.4. als Sequenz von Substitutionen beschriebene Methode zur Rücktransformation eines allgemeinen Punktes von S^3 in S^4 lässt sich in eine einzige übersichtliche Formel zusammenfassen, wenn in S^3 die oben definierten elliptischen Koordinaten verwendet werden. Dazu drücken wir zunächst die durch (62), (64) und (65) definierten Hilfsgrößen x, w_1, w_2, w_3, ρ mittels (95), (96), (97) und (98) durch die elliptischen Koordinaten ξ, η, χ aus und setzen alles in (66) ein. Nach dem Kürzen des positiven Faktors $(\xi + \xi^*)$ ergibt sich

$$(99) \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \frac{c}{\xi - \xi^* \cos \varphi} \begin{pmatrix} \eta \\ \eta^* \cos(\chi - \varphi) \\ \eta^* \sin(\chi - \varphi) \\ \xi^* \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Die vier Größen ξ, η, χ, φ können als krummlinige Koordinaten in S^4 aufgefasst werden, durch deren Angabe ein Punkt in S^4 eindeutig bestimmt ist. Dabei stellen die " φ -Linien" $\xi, \eta, \chi = \text{konst.}$ die Faserkurven dar. Um die zur B_3 -Transformation gehörende Nebenbedingung in den Koordinaten ξ, η, χ, φ aufzustellen, muss man (99) differenzieren und in (82a) einsetzen. Das Resultat dieser etwas umständlichen Rechnung ist

die schöne Beziehung

$$(100) \quad (\xi^2 - \eta^2) d\varphi = (c^2 - \eta^2) d\chi .$$

Zur Konstruktion der Kurve C sei jetzt C^* in elliptischen Koordinaten durch die Parameterdarstellung

$$(101) \quad \xi = \xi(\tau) , \quad \eta = \eta(\tau) , \quad \chi = \chi(\tau)$$

gegeben. $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$, $\chi(\tau)$ sind stetig differenzierbare Funktionen des Parameters τ , da C^* die y_1 -Achse meidet (χ ist dort nicht definiert). Gleichung (99) liefert nun die Parameterdarstellung $\chi_k(\tau)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) der gesuchten Kurve C , wenn $\varphi(\tau)$ so gewählt wird, dass die Nebenbedingung (100) erfüllt ist. Setzen wir für den Parameterwert τ_0 $\varphi(\tau_0) = \varphi_0$ fest, so ergibt nun die Integration von (100)

$$(102) \quad \varphi(\tau) = \varphi_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{c^2 - \eta^2}{\xi^2 - \eta^2} \frac{d\chi}{d\tau} d\tau .$$

Das Integral in (102) ist wegen

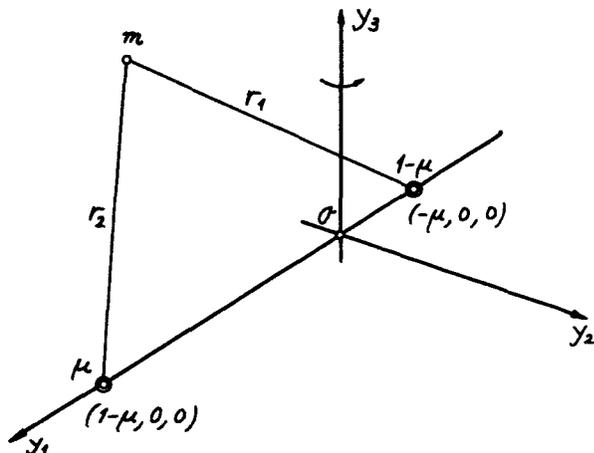
$$\xi^2 - \eta^2 = r_1 r_2 > 0$$

immer eigentlich. Durch (99) und (102) ist die Kurve C definiert. Nach ihrer Konstruktion besitzt sie wirklich die verlangten Eigenschaften.

2. REGULARISIERUNG DES RESTRINGIERTEN DREIKÖRPERPROBLEMS

2.1. Einführung der räumlichen Birkhoff-Koordinaten

Im restringierten Dreikörperproblem betrachtet man die Bewegung eines Mobils m von unendlich kleiner Masse unter dem Einfluss der Newtonschen Anziehung durch die beiden zentralen Massen $(1-\mu)$ und μ ($0 < \mu < 1$), welche auf Kreisen um ihren Schwerpunkt O rotieren (dies ist möglich, da das Mobil die Bewegung der zentralen Massen nicht beeinflusst).



Durch die obige Bezeichnung der zentralen Massen wurde die Masseneinheit als die totale Masse der Zentralkörper festgelegt. Als Längeneinheit soll der Abstand der zentralen Massen und als Zeiteinheit die reziproke Winkelgeschwindigkeit bei der Rotation um O gewählt werden. Nach dem dritten Keplerschen Gesetz hat dann die Gravitationskonstante den Wert 1.

Zur Beschreibung der Bewegung von m verwenden wir das Koordinatensystem y_1, y_2, y_3 , welches so um die y_3 -Achse rotiert, dass die zentralen Massen ständig die Koordinaten $(-\mu, 0, 0)$ bzw. $(1-\mu, 0, 0)$ haben. Da die Mobilmasse m

sich aus den Bewegungsgleichungen herauskürzen lässt, sei jetzt $m=1$ gesetzt.

Die Differentialgleichungen für die Bewegung des Mobils sollen nach der Methode von Lagrange aufgestellt werden. Zunächst finden wir für die kinetische Energie T von m

$$T = \frac{1}{2} (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2) .$$

Dabei sind y_i ($i=1,2,3$) die Koordinaten des Mobils, und Punkte bedeuten Ableitungen nach der Zeit t .

Die Abstände r_1, r_2 des Mobils von den Zentren $(-\mu, 0, 0)$, $(1-\mu, 0, 0)$ sind gegeben durch

$$(103) \quad \begin{aligned} r_1^2 &= (y_1 + \mu)^2 + y_2^2 + y_3^2 \\ r_2^2 &= (y_1 + \mu - 1)^2 + y_2^2 + y_3^2 , \end{aligned}$$

woraus man durch Linearkombination die Beziehung

$$(104) \quad (1-\mu)r_1^2 + \mu r_2^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \mu(1-\mu)$$

folgern kann.

Für die potentielle Energie Φ unseres Systems gilt

$$(105) \quad \Phi(y_1, y_2, y_3) = -\frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) + \Phi_0 ,$$

wobei Φ_0 eine frei wählbare Konstante ist. Drückt man in (105) den von der Zentrifugalkraft herrührenden Term $-\frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2)$ mittels (104) durch r_1, r_2, y_3 aus und setzt zugleich

$$\Phi_0 = -\frac{1}{2} \mu(1-\mu) ,$$

so kann man für Φ auch schreiben

$$(106) \quad \Phi(y_1, y_2, y_3) = - (1-\mu) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{r_1^2}{2} \right) - \mu \left(\frac{1}{r_2} + \frac{r_2^2}{2} \right) + \frac{y_3^2}{2} .$$

Schliesslich bekommt man durch Addition der kinetischen und der potentiellen Energie die totale Energie

$$(107) \quad h = \frac{1}{2}(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2) + \Phi(y_1, y_2, y_3),$$

für die bekanntlich der Energiesatz

$$(108) \quad \frac{dh}{dt} = 0, \quad h = \text{konst.}$$

gilt. Die rechte Seite von (107) wird hie und da auch Jacobi-Integral genannt.

Die Lagrangefunktion L des restringierten Dreikörperproblems enthält nebst den Termen T und $-\Phi$ ein durch die Corioliskraft bedingtes zusätzliches Glied:

$$(109) \quad L = \frac{1}{2}(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2) - y_2 \dot{y}_1 + y_1 \dot{y}_2 - \Phi(y_1, y_2, y_3).$$

Damit lauten die Bewegungsgleichungen

$$(110) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Wegen der in (106) auftretenden Nenner r_1, r_2 weisen die Bewegungsgleichungen (110) beim Verschwinden eines der Nenner, also beim Zusammenstoss des Mobils mit einer der zentralen Massen, je eine Singularität auf.

Die Regularisierung einer Singularität in einem System von Differentialgleichungen besteht darin, neue Variable so einzuführen, dass das transformierte Gleichungssystem an der betreffenden Stelle nicht mehr singular ist.

Einerseits ist nun bekannt, dass die ebene Birkhoff-Transformation [6] geeignet ist, beide Singularitäten im ebenen restringierten Dreikörperproblem miteinander zu regularisieren.

Andrerseits ermöglicht die KS-Transformation [2] die Regularisierung der Singularität in den Bewegungsgleichungen der gestörten Keplerbewegung. Da die B_3 -Transformation sich in zwei Zentren so verhält wie die KS-Transformation im Nullpunkt, ist die Vermutung naheliegend, dass die B_3 -Transformation sich eignet, um das räumliche restringierte Dreikörperproblem an beiden Singularitäten zu regularisieren. Die Möglichkeit einer solchen Regularisierung zu zeigen und sie explizite durchzuführen, ist das Ziel dieses Kapitels.

Um die B_3 -Transformation auf das oben definierte restringierte Dreikörperproblem anwenden zu können, müssen wir zunächst die in (39) noch frei gelassenen Konstanten spezialisieren: Die Abszissen der beiden Zentren betragen jetzt

$$c_1 = -\mu, \quad c_2 = 1 - \mu,$$

woraus folgt

$$(111) \quad c = \frac{c_2 - c_1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{c_1 + c_2}{2} = \frac{1}{2} - \mu.$$

Dies soll fortan in allen aus dem ersten Kapitel übernommenen Formeln gelten.

Nun wollen wir die Bewegung, gegeben durch (110) und die Anfangsbedingungen zur Zeit $t=0$,

$$(112) \quad y_i(0) = y_{i,0}, \quad \dot{y}_i(0) = \dot{y}_{i,0}, \quad i = 1, 2, 3,$$

in den durch die B_3 -Transformation

$$(113) \quad \begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2} - \mu + \frac{1}{2} \left(v_1 + \frac{v_1 (v_1^2 + \frac{1}{4})}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right) \\ y_2 &= \frac{1}{2} \left(v_2 + \frac{v_2 (v_2^2 - \frac{1}{4}) - v_3 v_1}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right) \\ y_3 &= \frac{1}{2} \left(v_3 + \frac{v_3 (v_3^2 - \frac{1}{4}) + v_2 v_1}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right) \end{aligned}$$

definierten verallgemeinerten Koordinaten v_1, v_2, v_3, v_4 beschreiben. Diese sollen aber ständig der der nichtholonomen Nebenbedingung (81) entsprechenden Gleichung

$$(114) \quad \sum_{\nu=1}^4 a_{\nu} v_{\nu} = 0$$

genügen, wobei jetzt

$$(115) \quad a_1 = 2v_1 v_4, \quad a_2 = 2v_2 v_4 - v_3, \quad a_3 = 2v_3 v_4 + v_2, \quad a_4 = \frac{1}{4} - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 + v_4^2$$

zu setzen ist (entsprechend muss man sich auch in $r_1, r_2, b_{k\ell}$ die speziellen Werte (111) eingesetzt denken). Damit ist die Anzahl der Freiheitsgrade wieder gleich drei. Wird die Lagrange-Funktion (109) durch die v_k ausgedrückt (unter Forderung der nichtholonomen Nebenbedingung (114)), so lauten die Lagrange-Gleichungen für die Funktionen $v_k(t)$

$$(116) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial v_k} = \lambda a_k, \quad k=1,2,3,4.$$

Dabei ist der Lagrange-Multiplikator $\lambda(t)$ eine weitere (fünfte) unbekannte Funktion (mit (114) und (116) sind auch fünf Gleichungen zu erfüllen).

Um die Umformungen an (116) übersichtlich zu gestalten, verwenden wir dazu die etwas verallgemeinerte Lagrange-Funktion

$$(117) \quad L = \frac{1}{2} (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2) + \sum_{\nu=1}^3 \dot{y}_{\nu} f_{\nu}(y_1, y_2, y_3) - \Phi(y_1, y_2, y_3; t).$$

$f_{\nu}(y_1, y_2, y_3)$ sind zunächst beliebige, in allen Argumenten stetig differenzierbare Funktionen, die später wieder spezialisiert werden sollen. Von der besonderen Form (106) der Funktion Φ machen wir in diesem Abschnitt keinen Gebrauch; im Hinblick auf 3.1. lassen wir hier sogar eine explizite Zeitabhängigkeit von Φ zu.

Unter Verwendung der Beziehung (86), die sich mittels Zeitableitungen auch als

$$(118) \quad \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2 = \frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} (\dot{v}_1^2 + \dot{v}_2^2 + \dot{v}_3^2 + \dot{v}_4^2)$$

schreiben lässt, findet man für die Lagrangefunktion (117) den Ausdruck

$$(119) \quad L = \frac{1}{2} \frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} (\dot{v}_1^2 + \dot{v}_2^2 + \dot{v}_3^2 + \dot{v}_4^2) + \sum_{i=1}^3 f_i(y_1, y_2, y_3) \sum_{l=1}^4 b_{il} \dot{v}_l - \Phi(y_1, y_2, y_3; t),$$

wobei aus dem 1. Kapitel die Abkürzung

$$b_{il} = \frac{\partial y_i}{\partial v_l}, \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3 \\ l = 1, 2, 3, 4 \end{array}$$

übernommen wurde. y_i , b_{il} , r_1 , r_2 muss man sich gemäss (113), (82) und (58) durch die v_k ausgedrückt denken. Durch Differentiation von (119) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v_k} &= \frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \dot{v}_k + \sum_{i=1}^3 f_i b_{ik}, & k = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{\partial L}{\partial v_k} &= \frac{1}{2} (\dot{v}_1^2 + \dot{v}_2^2 + \dot{v}_3^2 + \dot{v}_4^2) \frac{\partial}{\partial v_k} \left(\frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^3 \dot{v}_i \frac{\partial}{\partial v_k} \sum_{l=1}^3 f_l b_{il} - \frac{\partial}{\partial v_k} \Phi(y_1, y_2, y_3; t), \end{aligned}$$

womit die Lagrange-Gleichungen (116) als

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left(\frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \dot{v}_k \right) \\ &+ \sum_{l=1}^4 \dot{v}_l \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{\partial}{\partial v_l} (f_i b_{ik}) - \frac{\partial}{\partial v_k} (f_i b_{il}) \right\} \\ &- \frac{1}{2} (\dot{v}_1^2 + \dot{v}_2^2 + \dot{v}_3^2 + \dot{v}_4^2) \frac{\partial}{\partial v_k} \left(\frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right) + \frac{\partial}{\partial v_k} \Phi(y_1, y_2, y_3; t) = \lambda a_k \end{aligned}$$

angeschrieben werden können. Die Summe über den Ausdruck in

der geschweiften Klammer vereinfacht sich durch Ausdifferenzieren zu

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} b_{je} b_{ik} - \frac{\partial f_i}{\partial y_j} b_{jk} b_{ie} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} - \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \right) b_{ik} b_{je}, \end{aligned}$$

wodurch (116) die folgende Gestalt annimmt:

$$\begin{aligned} (120) \quad & \frac{d}{dt} \left(\frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \dot{v}_k \right) - \sum_{e=1}^4 \dot{v}_e \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} - \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \right) b_{ik} b_{je} \\ & - \frac{1}{2} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2) \frac{\partial}{\partial v_k} \left(\frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right) - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} b_{ik} = \lambda a_k. \end{aligned}$$

Nun soll die Grösse λ unter Verwendung der Nebenbedingung (114) eliminiert werden. Dazu erinnern wir daran, dass wegen (80) und der Orthogonalität der Matrix (b_{ke})

$$(121) \quad \sum_{k=1}^4 b_{ik} a_k = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

gilt. Durch Multiplikation der k -ten Gleichung von (120) mit a_k und Summation über k ergibt sich wegen (121)

$$\begin{aligned} (122) \quad & \sum_{k=1}^4 a_k \frac{d}{dt} \left(\frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \dot{v}_k \right) - \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2}{2} \sum_{k=1}^4 a_k \frac{\partial}{\partial v_k} \left(\frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right) \\ &= \lambda \sum_{k=1}^4 a_k^2. \end{aligned}$$

Zur weiteren Umformung setzen wir die zur Matrix (b_{ik}) gehörende Orthogonalitätsrelation (85), die auch als

$$(123) \quad \frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2) = \sum_{p,q=1}^4 \sum_{i=1}^3 b_{ip} b_{iq} v_p v_q$$

geschrieben werden kann, in den zweiten Term Ω der linken Seite von (122) ein. Wir finden

$$\begin{aligned}\Omega &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 a_k \frac{\partial}{\partial v_k} \sum_{p,q=1}^4 \sum_{i=1}^3 b_{ip} b_{iq} \dot{v}_p \dot{v}_q \\ &= -\sum_{k,p,q=1}^4 \sum_{i=1}^3 a_k \frac{\partial b_{ip}}{\partial v_k} b_{iq} \dot{v}_p \dot{v}_q.\end{aligned}$$

Partielle Differentiation von (121) nach v_p ergibt

$$\sum_{k=1}^4 b_{ik} \frac{\partial a_k}{\partial v_p} = -\sum_{k=1}^4 a_k \frac{\partial b_{ik}}{\partial v_p} - \sum_{k=1}^4 a_k \frac{\partial b_{ip}}{\partial v_k}, \quad p=1,2,3,4,$$

womit sich Ω weiter vereinfachen lässt:

$$\begin{aligned}\Omega &= -\sum_{k,p,q=1}^4 \frac{\partial a_k}{\partial v_p} \dot{v}_p \dot{v}_q \sum_{i=1}^3 b_{ik} b_{iq} \\ &= -\sum_{k=1}^4 \dot{a}_k \frac{r_1 r_2}{v_1 + v_2 + v_3} \dot{v}_k.\end{aligned}$$

Setzt man dies in (122) ein, und verwendet man zugleich die aus (80) und (85) folgende Beziehung

$$\sum_{k=1}^4 a_k^2 = 4 r_1 r_2 (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2),$$

so geht (122) über in

$$(124) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \sum_{k=1}^4 a_k \dot{v}_k \right\} = 4 \lambda r_1 r_2 (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2).$$

wird die Nebenbedingung (114) gefordert, so folgt aus (124)

$$(125) \quad \lambda(t) = 0,$$

sofern $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \neq 0$ und $r_1 r_2 \neq 0$ ist. Die erste Bedingung, nämlich dass die v_y -Achse nicht erreicht wird, ist im Fall des restringierten Dreikörperproblems immer erfüllt, wie im nächsten Abschnitt ausgeführt werden wird. Dagegen kann sehr wohl r_1 oder r_2 verschwinden (Zusammenstoß des Mobils mit einer

der zentralen Massen). Aus Stetigkeitsgründen gilt aber auch dann $\lambda = 0$. Jetzt lauten also die transformierten Bewegungsgleichungen (120)

$$(126) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \dot{y}_k \right) + \sum_{l=1}^4 \dot{y}_l \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} - \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \right) b_{ik} b_{jl} \quad k=1,2,3,4$$

$$- \frac{1}{2} (\dot{v}_1^2 + \dot{v}_2^2 + \dot{v}_3^2 + \dot{v}_4^2) \frac{\partial}{\partial v_k} \left(\frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi}{\partial y_i} b_{ik} = 0.$$

Die Anfangswerte der Lagekoordinaten für das System (126),

$$(127) \quad v_k(0) = v_{k,0}, \quad k=1,2,3,4,$$

ergeben sich aus den Anfangswerten (112) durch Anwendung des am Schluss von 1,4. beschriebenen Rücktransformationsverfahrens mit einem beliebigen Winkel φ ($v_{k,0}$ hat jetzt eine andere Bedeutung als in 1.4.).

Die Anfangswerte $\dot{y}_{k,0}$ der Ableitungen müssen dann natürlich so bestimmt werden, dass sie zusammen mit $v_{k,0}$ die Nebenbedingung erfüllen (es wurden ja von Anfang an nur solche Geschwindigkeitsvektoren zugelassen). Dies ist der Fall, wenn wir gemäss (89)

$$(128) \quad \dot{y}_{k,0} = \dot{y}_k(0) = \frac{v_{1,0}^2 + v_{2,0}^2 + v_{3,0}^2}{r_1(v_{1,0}) r_2(v_{2,0})} \sum_{i=1}^3 b_{ik}(v_{i,0}) \dot{y}_{i,0}, \quad k=1,2,3,4$$

setzen. Die Lösungen $v_k(t)$ des Systems (126) mit den Anfangsbedingungen (127) und (128) erfüllen nun die Nebenbedingung wirklich zu allen Zeiten, wie (124) mit $\lambda = 0$ zeigt.

Wir haben somit durch die Differentialgleichungen (126) und die Anfangsbedingungen (127) und (128) in S^4 eine "korrespondierende Bewegung" zur ursprünglich in S^3 durch die Lagrange-funktion (117) und die Anfangsbedingungen (112) gegebenen Bewegung konstruieren können. Alle Geschwindigkeitsvektoren

der Bahnkurve in S^4 erfüllen die Nebenbedingung, und durch die B_3 -Transformation wird die Bewegung in S^4 auf die Bewegung in S^3 abgebildet. Das in 1.6. mittels elliptischer Koordinaten gelöste Problem der Transformation einer Kurve C^* von S^3 in eine Kurve C von S^4 ist also hier mit Hilfe der Differentialgleichungen von C^* und C automatisch gelöst worden.

Man darf aber jetzt (im Gegensatz zu 1.6.) zulassen, dass die im Endlichen von S^3 gelegene Kurve C^* die y_1 -Achse schneidet (ausserhalb der Zentren). Da die Punkte $y_2 = y_3 = 0$ durch die B_3 -Transformation auf die Punkte $y_2 = y_3 = 0$ abgebildet werden, schneidet die zu C^* gehörende Kurve C die v_1, v_4 -Ebene. Die Schnittpunkte liegen aber alle ausserhalb der v_4 -Achse und der unkonformen Punkte. Da sich die Differentialgleichungen (126) in diesen Schnittpunkten regulär verhalten, lässt sich die Kurve C ohne weiteres über einen solchen Punkt hinaus fortsetzen.

2.2. Transformation der Zeit

Zur Diskussion der regularisierenden Wirkung der B_3 -Transformation spezialisieren wir jetzt die Differentialgleichungen (126) auf die Lagrangefunktion (109); wir setzen also

$$(129) \quad f_1(y_1, y_2, y_3) = -y_2, \quad f_2 = y_1, \quad f_3 = 0,$$

wodurch (126) in

$$(130) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \dot{v}_k \right) + 2 \sum_{l=1}^4 (b_{1l} b_{2k} - b_{2l} b_{1k}) \dot{v}_l \\ - \frac{1}{2} (\dot{v}_1^2 + \dot{v}_2^2 + \dot{v}_3^2 + \dot{v}_4^2) \frac{\partial}{\partial v_k} \left(\frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right) + \frac{\partial}{\partial v_k} \Phi(y_1, y_2, y_3; t) = 0 \quad k=1,2,3,4$$

übergeht. Gleichzeitig legen wir der Funktion Φ wieder die spezielle Bedeutung (106) zu; insbesondere soll also wieder

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

gelten. Daraus lässt sich die Existenz eines Energieintegrals folgern, indem man die k -te Gleichung von (130) mit \dot{v}_k multipliziert, über k summiert und nach t integriert. Einfacher bekommt man dieses Resultat durch Uebergang zu den Birkhoff'schen Koordinaten in (107):

$$(131) \quad \frac{1}{2} \frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} (\dot{v}_1^2 + \dot{v}_2^2 + \dot{v}_3^2 + \dot{v}_4^2) + \Phi(y_1, y_2, y_3) = h.$$

Die Singularität beim Verschwinden eines der Abstände r_1, r_2 ist in den Gleichungen (130) immer noch vorhanden. In Anlehnung an bekannte Methoden (z.B. Levi-Civita [3]) versuchen wir, durch Verwendung des Energieintegrals und durch Einführung einer neuen unabhängigen Variablen aus (130) reguläre Gleichungen zu bekommen.

Wir multiplizieren zu diesem Zweck (130) mit $r_1 r_2 / (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$ und ersetzen den dritten Term mittels des Energiesatzes (131):

$$(132) \quad \frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \dot{v}_k \right) + 2 \sum_{\ell=1}^4 (b_{\ell k} b_{2k} - b_{\ell c} b_{1k}) \frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \dot{v}_\ell$$

$$+ (\Phi(y_1, y_2, y_3) - h) \frac{\partial}{\partial v_k} \left(\frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right) + \frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \frac{\partial}{\partial v_k} \Phi(y_1, y_2, y_3) = 0.$$

Wird nun anstelle der Zeit t die neue unabhängige Variable s_1 durch die Beziehungen

$$(133) \quad s_1 = \int_0^t \frac{dt}{r_1 r_2}, \quad \frac{d}{ds_1} = r_1 r_2 \frac{d}{dt},$$

$$(134) \quad \frac{dt}{ds_1} = r_1 r_2$$

eingeführt, so geht (132) in

$$(135) \quad \frac{d}{ds_1} \left(\frac{1}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \frac{dv_k}{ds_1} \right) + 2 \sum_{\ell=1}^4 (b_{\ell k} b_{2k} - b_{\ell c} b_{1k}) \frac{dv_\ell}{ds_1}$$

$$+ (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \frac{\partial}{\partial v_k} \left\{ \frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} (\Phi(y_1, y_2, y_3) - h) \right\} = 0$$

über. Einsetzen der in (106) definierten potentiellen Energie Φ in (135) ergibt schliesslich nach Kürzen mit r_1 bzw. r_2 in der geschweiften Klammer

$$(136) \quad \frac{d}{ds_1} \left(\frac{1}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \frac{dv_k}{ds_1} \right) + 2 \sum_{\ell=1}^4 (b_{\ell k} b_{2k} - b_{\ell c} b_{1k}) \frac{dv_\ell}{ds_1}$$

$$+ (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \frac{\partial}{\partial v_k} \left\{ \frac{-(1-\mu)r_2 \left(1 + \frac{r_1^2}{2}\right) - \mu r_1 \left(1 + \frac{r_2^2}{2}\right) + r_1 r_2 \left(\frac{y_2^2}{2} - h\right)}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right\} = 0,$$

$k=1, 2, 3, 4.$

Denkt man sich im Differentialgleichungssystem (136) $\mathcal{H}, r_i,$
 b_{ik} gemäss (113), (58) und (82) (mit $c = \frac{1}{2}$) durch die v_i
 ausgedrückt und die partiellen Differentiationen ausgeführt,
 so erkennt man, dass dieses Gleichungssystem beim Verschwinden
 von v_1 bzw. v_2 nicht mehr singularär ist. Mit dem Differential-
gleichungssystem (136) ist also die simultane Regularisierung
beider Kollisionen im räumlichen restringierten Dreikörperpro-
blem geleistet.

Hingegen ist das System (136) in allen Punkten der v_1 -Achse
 $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 0$ singularär. Dies schadet aber der Regularisie-
 rung nicht, denn jene Punkte sind Urbilder des unendlich fernen
 Punktes des physikalischen Raumes S^3 . Sie werden somit vom
 Mobil in endlicher Zeit nicht erreicht.

Nebenbei sei erwähnt, dass in ähnlicher Weise bei der ebenen
 Birkhoff-Regularisierung [6] der Nullpunkt als Urbild des Un-
 endlichen singularär wird.

Natürlich müssen zur Integration von (136) die Anfangsbed-
 ingungen (128) auf die regularisierende Zeit S_1 umgerechnet
 werden:

$$(137) \quad \left. \frac{dv_k}{ds_1} \right|_{s_1=0} = (v_{1,0}^2 + v_{2,0}^2 + v_{3,0}^2) \sum_{i=1}^3 b_{ik}(v_{i,0}) \dot{y}_{i,0} \quad , \quad k=1,2,3,4 .$$

Die Energiekonstante h kann aus den Anfangswerten im physika-
 lischen Raum mit Hilfe von (107) berechnet werden.

Die Gestalt der Gleichungen (132) legt es nahe, eine von
 (133) abweichende Zeittransformation zu verwenden:

$$(138) \quad s = \int_0^t \frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{r_1 r_2} dt \quad , \quad \frac{d}{ds} = \frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \frac{d}{dt} \quad ,$$

beziehungsweise

$$(139) \quad \frac{dt}{ds} = \frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} .$$

Die Regularisierungseigenschaften von (133) und (138) sind dieselben. Die Differentiale ds_k und ds unterscheiden sich ja nur durch den Faktor $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$, der für endliche Zeiten immer positiv und endlich bleibt.

Mit s als unabhängiger Variablen findet man aus (132) die regularisierten Bewegungsgleichungen

$$(140) \quad \frac{dv_k}{ds^2} + 2 \sum_{i=1}^4 (b_{ki} b_{2i} - b_{2i} b_{ki}) \frac{dv_i}{ds} \quad k=1,2,3,4$$

$$+ \frac{\partial}{\partial v_k} \left\{ \frac{-(1-\mu)r_2 \left(1 + \frac{h^2}{2}\right) - \mu r_1 \left(1 + \frac{r_1^2}{2}\right) + r_1 r_2 \left(\frac{v_1^2}{2} - h\right)}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right\} = 0.$$

Für die Anfangswerte der Ableitungen gilt hier

$$(141) \quad \left. \frac{dv_k}{ds} \right|_{s=0} = \sum_{i=1}^3 b_{ik}(v_{i,0}) \dot{y}_{i,0}, \quad k=1,2,3,4.$$

Die Verwendung von s als unabhängige Variable liefert etwas einfachere Differentialgleichungen; z.B. treten in (140) - im Gegensatz zu (136) - die ersten Ableitungen dv_k/ds linear auf. Dagegen ist der Parameter s_0 für numerische Rechnungen etwas besser geeignet, wie in 2.4. ausgeführt werden soll.

2.3. Formelzusammenstellung

Im Anschluss an die Aufstellung der regularisierten Bewegungsgleichungen für das restringierte Dreikörperproblem soll jetzt eine Uebersicht über die wichtigsten dabei aufgetretenen Formeln gegeben werden. Wir ordnen die Gleichungen derart an, dass dieser Abschnitt als Grundlage für die Herstellung eines Computerprogramms dienen kann.

In dem restringierten Dreikörperproblem, das durch einen speziellen Wert des Parameters μ ($0 < \mu < 1$) gegeben ist (siehe 2.1. !), soll die Bewegung $y_j(t)$ des Mobils m im rotierenden Koordinatensystem y_1, y_2, y_3 aus Anfangslage $y_j(0)$ und Anfangsgeschwindigkeit $\dot{y}_j(0)$ bestimmt werden. Gemäss (112) ist also für die Zeit $t = 0$

$$y_j(0) = y_{j,0} , \quad \dot{y}_j(0) = \dot{y}_{j,0}$$

gegeben (der Index j durchläuft in diesem Abschnitt immer die Werte $1, 2, 3$; k und ℓ jedoch laufen von 1 bis 4). Damit lassen sich die anfänglichen Abstände $r_{\ell 0}, r_{k,0}$ des Mobils von den Zentren aus den zu (103) analogen Gleichungen

$$r_{\ell 0} = \sqrt{(x_{\ell 0} + \mu)^2 + y_{\ell 0}^2 + z_{\ell 0}^2} , \quad r_{k,0} = \sqrt{(x_{k,0} + \mu - 1)^2 + y_{k,0}^2 + z_{k,0}^2}$$

berechnen. Nun ergibt sich die in den regularisierten Differentialgleichungen auftretende Energiekonstante h aus der Beziehung

$$h = \frac{1}{2}(z_{3,0}^2 + \dot{y}_{3,0}^2 + \dot{y}_{2,0}^2 + \dot{y}_{1,0}^2) - (1 - \mu) \left(\frac{1}{r_{\ell 0}} + \frac{r_{\ell 0}^2}{2} \right) - \mu \left(\frac{1}{r_{k,0}} + \frac{r_{k,0}^2}{2} \right) ,$$

welche aus (106) und (107) folgt.

Die Anfangslage $V_{k,0}$ für die Bewegung im vierdimensionalen Parameterraum S^4 kann nach dem am Schluss von 1.4. beschriebenen Rücktransformationsverfahren ermittelt werden. Dieses Ziel kann

man auch erreichen, indem man zunächst gemäss (95), (97) und (96) die elliptischen Koordinaten ξ, η, χ des Mobils und die Hilfsgrössen ξ^*, η^* berechnet:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{r_{2,0} + r_{3,0}}{2}, & \eta &= \frac{r_{3,0} - r_{2,0}}{2} \\ \xi^* &= \sqrt{\xi^2 - \frac{1}{4}}, & \eta^* &= \sqrt{\frac{1}{4} - \eta^2} \\ \chi &= \begin{cases} \text{beliebig,} & \text{wenn } y_{2,0} = y_{3,0} = 0 \\ \arg(y_{2,0} + iy_{3,0}) & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Hernach liefert die Gleichung (99), d.h.

$$\begin{pmatrix} v_{1,0} \\ v_{2,0} \\ v_{3,0} \\ v_{\varphi,0} \end{pmatrix} = \frac{\frac{1}{2}}{\xi - \xi^* \cos \varphi} \begin{pmatrix} \eta \\ \eta^* \cos(\chi - \varphi) \\ \eta^* \sin(\chi - \varphi) \\ \xi^* \sin \varphi \end{pmatrix},$$

direkt die Anfangslage $v_{k,0}$. Der Winkel φ ist beliebig; ein günstiger Wert ist z.B. $\varphi = 0$ (Näheres dazu folgt in 2.4.). Jetzt können die partiellen Ableitungen b_{jk} für den Anfang der Bewegung aus der Tabelle (82) berechnet werden (dort ist jetzt $c = \frac{1}{2}$ und $v_k = v_{k,0}$ zu setzen).

In dieser Zusammenstellung beschränken wir uns nun auf die Angabe der Formeln, welche bei Verwendung des in (133) definierten Parameters s_j als unabhängige Variable zur Anwendung kommen.

Die Gleichung (137) erlaubt jetzt noch die Berechnung der "Anfangsgeschwindigkeit" dv_k/ds_j in den regularisierenden Variablen für den Parameterwert $s_j = 0$:

$$\left. \frac{dv_k}{ds_j} \right|_{s_j=0} = (v_{1,0}^2 + v_{2,0}^2 + v_{3,0}^2) \sum_{i=1}^3 b_{jk}(v_{i,0}) \dot{y}_{i,0}.$$

Damit sind die Anfangswerte bekannt, mit welchen nun das regularisierte Differentialgleichungssystem (136),

$$\frac{d}{ds_r} \left(\frac{1}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \frac{dv}{ds_r} \right) + 2 \sum_{l=1}^4 (b_{lc} b_{2k} - b_{2c} b_{lk}) \frac{dv_l}{ds_r} + (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \frac{\partial}{\partial v_k} \left\{ \frac{-(1-\mu)r_2 \left(1 + \frac{r_2^2}{2}\right) - \mu r_1 \left(1 + \frac{r_1^2}{2}\right) + r_1 r_2 \left(\frac{v_1^2}{2} - h\right)}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right\} = 0,$$

integriert werden muss. Um dieses Differentialgleichungssystem explizite hinzuschreiben, müssen für die b_{jk} die Ausdrücke aus der Tabelle (82) (mit $c = \frac{1}{2}$) eingesetzt werden. Ferner sind r_1, r_2, y_3 durch die aus (58) und (113) übernommenen Ausdrücke

$$(58) \quad r_1 = \frac{\left(v_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2}{2\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \quad r_2 = \frac{\left(v_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2}{2\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

$$y_3 = \frac{1}{2} \left(v_3 + \frac{v_3 \left(v_4 - \frac{1}{4}\right) + v_2 v_4}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right)$$

zu ersetzen, und schliesslich müssen die partiellen Differentiationen der geschweiften Klammern nach den v_k explizite ausgeführt werden.

Die Anwendung eines numerischen Integrationsverfahrens auf das obige Differentialgleichungssystem liefert für diskrete Parameterwerte s_r jeweils den Punkt v_k der Bahnkurve in S^4 und den zugehörigen Tangentialvektor dv_k/ds_r .

Aus v_k ergibt sich durch Anwendung der B_3 -Transformation (113) der Punkt

$$y_1 = \frac{1}{2} - \mu + \frac{1}{2} \left(v_1 + \frac{v_1 \cdot \left(v_4^2 + \frac{1}{4}\right)}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right)$$

$$y_2 = \frac{1}{2} \left(v_2 + \frac{v_2 \left(v_4 - \frac{1}{4}\right) - v_3 v_4}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right)$$

$$y_3 = \frac{1}{2} \left(v_3 + \frac{v_3 \left(v_4 - \frac{1}{4}\right) + v_2 v_4}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right)$$

auf der Bahn des Mobils im physikalischen Raum S^3 . Für später sollen auch die Abstände r_1, r_2 aus den oben wiederholten Gleichungen (58) berechnet werden. Interessiert man sich für

den zeitlichen Verlauf der Bewegung des Mobils, so bekommt man die Zeit t , zu welcher sich das Mobil im Punkte y_j befindet, durch numerische Quadratur aus der aus (134) folgenden Gleichung

$$t = \int_0^{s_j} r_1(\sigma) \cdot r_2(\sigma) d\sigma.$$

Zur Bestimmung der Geschwindigkeit \dot{y}_j des Mobils im Punkte y_j müssen zuerst die Grössen b_{ek} aus der Tabelle (82) für den Punkt v_k berechnet werden. Damit lässt sich dann die aus (71) und (134) folgende Gleichung

$$(142) \quad \dot{y}_j = \frac{1}{r_1 r_2} \sum_{k=1}^4 b_{jk} \frac{dv_k}{ds_1}$$

auswerten.

Es ist möglich, die so gewonnenen Resultate auf zwei Arten zu kontrollieren (Rundungs- und Abbrechfehler bei der numerischen Integration!). Erstens müssen die regularisierten Koordinaten v_k und ihre Ableitungen dv_k/ds_1 , die Nebenbedingung (81) erfüllen,

$$\sum_{k=1}^4 b_{kk} \frac{dv_k}{ds_1} = 0,$$

und zweitens muss die Energiegleichung

$$h = \frac{1}{2} (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{y}_4^2) - (1-\mu) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{r_1^2}{2} \right) - \mu \left(\frac{1}{r_2} + \frac{r_2^2}{2} \right)$$

durch die Lagekoordinaten und die Geschwindigkeit des Mobils befriedigt werden.

Bei einer Kollision des Mobils mit einem Zentralkörper versagen die Formeln zur Berechnung der Energiekonstanten h und der Geschwindigkeitskomponenten \dot{y}_j . Dieser Fall wird im Abschnitt 2.5. diskutiert werden.

2.4. Hinweise zur numerischen Behandlung

Die numerische Lösung der regularisierten Bewegungsgleichungen für das räumliche restringierte Dreikörperproblem erfordert neun Integrationen (acht für das Differentialgleichungssystem (136) bzw. (140) und eine für die Zeitberechnung); das sind drei mehr, als für die Lösung desselben Problems ohne Regularisierung benötigt werden. Diesem Nachteil steht einmal der Vorteil gegenüber, dass bei der Integration des regularisierten Systems nebst dem Energieintegral auch die Nebenbedingung (82a) zur Kontrolle der Genauigkeit gebraucht werden kann (siehe 2.3.).

Das wichtigste ist aber, dass es durch die Regularisierung möglich wird, beliebige, im Endlichen des physikalischen Raumes verlaufende Bahnen ohne besondere Massnahmen zu berechnen. Eine zufällig auftretende Kollision des Mobils mit einem Zentralkörper stört die Rechnung gar nicht. Die auffälligste Erscheinung in einem solchen Fall ist die automatische Anpassung des Zeitschrittes bei gleichbleibender Schrittlänge in der unabhängigen Variablen s , bzw. S . Die Beziehungen

$$(143) \quad dt = r_1 r_2 ds, \quad dt = \frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} ds$$

zeigen, dass der Zeitschritt bei jeder Annäherung des Mobils an eines der Zentren stark verkleinert wird.

Nach dem Formelsatz 2.3. wurde ein ALGOL-Programm zur numerischen Lösung des räumlichen restringierten Dreikörperproblems aufgestellt. Die Experimente auf einer Rechenanlage Control Data 1604 haben alle Erwartungen erfüllt. Diese Resultate werden aber in einer gesonderten Publikation erscheinen.

Aus (143) ist ersichtlich, dass bei Verwendung der unabhängigen Variablen S der Nenner $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$ den Zeitschritt in schwer voraussehbarer Weise verändert. Dies wirkt sich be-

sonders dann ungünstig aus, wenn der Nenner klein ist und der Zeitschritt daher sehr gross wird. Ein solcher Fall liegt z.B. vor, wenn sich der Punkt \underline{v} auf seiner Faser in der Nähe des innersten Punktes befindet (siehe 1.4.).

Vor allem bei Verwendung der unabhängigen Variablen s braucht man deshalb ein Verfahren, um eine starke Annäherung der Bahnkurve in S^4 an die v_k -Achse zu vermeiden. Im folgenden wird eine solche Methode kurz beschrieben.

In 1.4. wurden die automorphen Transformationen \mathcal{E}_ρ eingeführt. Das sind Abbildungen des Raumes S^4 auf sich, bei denen die Fasern in sich übergehen. Da alle Punkte einer Faser denselben Bildpunkt in S^3 haben, kann die Bahnkurve in S^4 unter Verwendung von \mathcal{E}_ρ modifiziert werden, ohne ihr Bild in S^3 zu ändern: Für einen frei wählbaren Parameterwert s wird die Bewegung in S^4 unterbrochen und Endlage \underline{v} und Endgeschwindigkeit $\underline{v}' = d\underline{v}/ds$ einer automorphen Transformation \mathcal{E}_ρ unterworfen. Mit den transformierten Grössen $\underline{v}^*, \underline{v}'^*$ als Anfangswerte zum selben Parameterwert s wird die Bewegung fortgesetzt.

Besonders einfach wird dieses Verfahren durch Verwendung der speziellen automorphen Transformation \mathcal{E}_π , die sich mit $c = \frac{1}{2}$, $\varphi = \pi$ aus (45) ergibt:

$$(144) \quad \begin{aligned} v_1^* &= \frac{v_4}{4(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2)} \\ v_k^* &= -\frac{v_k}{4(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2)}, \quad k = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Damit transformieren sich die Ableitungen nach s wie folgt:

$$(145) \quad \begin{pmatrix} v_1^* \\ v_2^* \\ v_3^* \\ v_4^* \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 & -2v_1v_2 & -2v_1v_3 & -2v_1v_4 \\ 2v_1v_2 & -v_1^2 + v_2^2 - v_3^2 - v_4^2 & 2v_2v_3 & 2v_2v_4 \\ 2v_1v_3 & 2v_2v_3 & -v_1^2 - v_2^2 + v_3^2 - v_4^2 & 2v_3v_4 \\ 2v_1v_4 & 2v_2v_4 & 2v_3v_4 & -v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 + v_4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \\ v_4' \end{pmatrix}.$$

Ein Kriterium zur Entscheidung, wann \mathcal{E}_x ausgeführt werden soll, liefert die aus (144) folgende Beziehung

$$(146) \quad \sqrt{v_1^{*2} + v_2^{*2} + v_3^{*2}} = \frac{1}{4(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2)} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} :$$

Die Transformation \mathcal{E}_x ist nur dann von Nutzen, wenn durch ihre Anwendung der Abstand von der v_4 -Achse vergrössert wird, d.h. wenn

$$\sqrt{v_1^{*2} + v_2^{*2} + v_3^{*2}} > \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

gilt. Dies ist nach (146) der Fall, wenn

$$(147) \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 < \frac{1}{4}$$

ist. Jedesmal, wenn nach einem Integrationsschritt das Kriterium (147) erfüllt ist, sollte somit die Transformation \mathcal{E}_x durchgeführt werden. Nachher gilt dann gemäss (144) und (147)

$$v_1^{*2} + v_2^{*2} + v_3^{*2} + v_4^{*2} > \frac{1}{4} ,$$

so dass das Kriterium (147) die Transformation \mathcal{E}_x nicht nochmals verlangt.

Für die ebene Birkhoff-Transformation bedeutet diese Technik den Uebergang zum inversen Punkt in der v_1, v_2 -Ebene.

Das besondere Verhalten der v_4 -Achse legt den Wunsch nahe, eine regularisierende Transformation zu finden, die keine neuen Singularitäten einschleppt, also keinen endlichen Punkt des Parameterraumes S^4 in den unendlich fernen Punkt des physikalischen Raumes S^3 wirft. Im ebenen restringierten Problem erfüllt die Transformation von Thiele [7] diesen Wunsch. Es ist aber nicht bekannt, ob sie sich auf dreidimensionale Probleme verallgemeinern lässt. Auf alle Fälle müssten transzendente Funktionen eingeführt werden, die zu recht verwickelten Differentialgleichungen führen würden.

2.5. Kollisionsbahnen

Eine durch das Differentialgleichungssystem (136) oder (140) definierte Bahnkurve in S^4 heisst Kollisionsbahn (Ejektionsbahn), wenn sie durch einen der unkonformen Punkte $(\frac{\sigma}{2}, 0, 0, 0)$, $\sigma = \pm 1$, geht. Dann stösst nämlich das Mobil in S^3 mit dem an der Stelle $(\frac{1+\sigma}{2} - \mu, 0, 0)$ gelegenen Zentralkörper zusammen. Um das Grenzverhalten der Geschwindigkeit bei einer Kollision zu untersuchen, schreiben wir die Energiegleichung (107) (mit ϕ aus (106)) mittels der unabhängigen Variablen s_j (Ableitungen nach s_j werden in diesem Abschnitt durch Striche bezeichnet). Zunächst führt die Zeittransformation (133) die Gleichung (118) in

$$(147) \quad \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2 = \frac{v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2 + v_4'^2}{r_1 r_2 (v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2)}$$

über, womit sich dann aus (107) unschwer die Beziehung

$$(148) \quad \frac{1}{2} (v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2 + v_4'^2) - (v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2) \left\{ (1-\mu) r_1 \left(1 + \frac{v_1^2}{2}\right) + \mu r_2 \left(1 + \frac{v_2^2}{2}\right) + r_1 r_2 \left(h - \frac{y_3^2}{2}\right) \right\}$$

ergibt. Bei einem Zusammenstoss des Mobils mit der zentralen Masse μ werden die Grenzwerte

$$(149) \quad v_1 \rightarrow \frac{1}{2}, \quad v_2, v_3, v_4 \rightarrow 0, \quad r_1 \rightarrow 1, \quad r_2 \rightarrow 0$$

angenommen; damit folgt aus (148)

$$(150) \quad v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2 + v_4'^2 \rightarrow \frac{\mu}{2} \quad (\text{Stoss mit } \mu).$$

Analog ergibt sich für den Stoss mit $(1-\mu)$

$$(151) \quad v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2 + v_4'^2 \rightarrow \frac{1-\mu}{2} \quad (\text{Stoss mit } (1-\mu)).$$

Will man nun das Anfangswertproblem des Systems (136) in einer Kollision drin lösen (es sei dort $s_4 = 0$), so muss man die Anfangswerte v_k' so wählen, dass sie (150) bzw. (151) er-

füllen. Dann lässt sich aber die Energiekonstante h aus den Anfangswerten nicht mehr bestimmen, wie (148) zeigt. Vielmehr kann h vorgegeben werden als Ersatz für den durch die Bedingung (150) bzw. (151) verlorenen Freiheitsgrad. Wegen der Regularität der Differentialgleichung (136) im betrachteten Stoss (Parameterwert $S_y = 0$), existiert die Lösung des Anfangswertproblems in einer Umgebung von $S_y = 0$ und ist dort regulär. Ob eine solche Lösung für alle Zeiten analytisch fortsetzbar ist, wird hier nicht untersucht. Es müssten dazu die Methoden von Sundman [8] und Siegel [9] an unseren Fall adaptiert werden.

Im Gegensatz zur Geschwindigkeit $\underline{v}' = (v_1', v_2', v_3', v_4')$ im regularisierten System ist die Geschwindigkeit des Mobils bei einer Kollision unendlich gross. Um die Stossrichtung aus der Richtung von \underline{v}' (zur Zeit des Stosses) zu bestimmen, betrachten wir das Mobil kurz nach einer Kollision mit dem durch das Vorzeichen von σ gegebenen Zentralkörper. Seit der Kollision habe sich S_y um die kleine Grösse ΔS_y vergrössert. Die Birkhoff'schen Koordinaten des Mobils lauten dann in erster Näherung

$$(152) \quad \left(\frac{\sigma}{2} + v_1' \Delta S_y, v_2' \Delta S_y, v_3' \Delta S_y, v_4' \Delta S_y \right).$$

Da dieser Punkt nahe bei einem der Zentren liegt, kann zu seiner Transformation in den physikalischen Raum S^3 die Entwicklung (42) gebraucht werden. Nach (41) lauten die dort verwendeten Relativkoordinaten \bar{v}_k für den Punkt (152)

$$(153) \quad \bar{v}_1 = \sigma v_1' \Delta S_y, \quad \bar{v}_k = v_k' \Delta S_y, \quad k=2,3,4.$$

Beim Einsetzen dieser Grössen in (42) brauchen dort nur die Glieder 2. Ordnung berücksichtigt zu werden, was dem Einsetzen von (153) in die KS-Transformation (1) entspricht:

$$(154) \quad \begin{aligned} \bar{y}_1 &= \bar{v}_1^2 - \bar{v}_2^2 - \bar{v}_3^2 + \bar{v}_4^2 \\ \bar{y}_2 &= 2(\bar{v}_1 \bar{v}_2 - \bar{v}_3 \bar{v}_4) \\ \bar{y}_3 &= 2(\bar{v}_1 \bar{v}_3 + \bar{v}_2 \bar{v}_4) \end{aligned}$$

Da die Richtung des durch die Gleichungen (154) definierten Vektors $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$ nicht vom Betrag von Δs_y abhängt, stimmt diese Richtung mit ihrem Grenzwert für $\Delta s_y \rightarrow 0$ überein. Aus diesem Grund kann jetzt in (153) Δs_y zur Definition von \bar{v}_k beliebig gewählt werden, z.B. $\Delta s_y = 1$. Nur um die Vernachlässigung der höheren Glieder zu legitimieren, musste oben Δs_y als kleine Grösse vorausgesetzt werden.

Nun ergibt sich nach (41) die Richtung des Stosses als die Richtung des Vektors

$$(155) \quad (\sigma \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3) .$$

Will man eine in einem Stoss beginnende Bewegung in den Raum S^4 übertragen, so hat man umgekehrt zur gegebenen Stossrichtung eine Anfangsgeschwindigkeit im regularisierten System zu finden. Anstelle der jetzt versagenden Gleichung (137) kann das eben beschriebene Transformationsverfahren in umgekehrter Richtung verwendet werden.

Die Richtung des Stosses in dem durch das Vorzeichen von $\sigma = \pm 1$ bestimmten Zentrum sei durch den Einheitsvektor

$$(156) \quad (\sigma \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3) , \quad \bar{y}_1^2 + \bar{y}_2^2 + \bar{y}_3^2 = 1$$

gegeben. Auf diesen Vektor muss nun die Umkehrung der KS-Transformation (154) angewendet werden. Dies kann wegen der Normierung in (156) gemäss (18) z.B. durch den Formelsatz

$$(157) \quad \begin{aligned} \bar{v}_1^2 + \bar{v}_4^2 &= \frac{1}{2} (1 + \bar{y}_1) , \\ \bar{v}_2 &= \frac{\bar{y}_2 \bar{v}_1 + \bar{y}_3 \bar{v}_4}{1 + \bar{y}_1} , \quad \bar{v}_3 = \frac{\bar{y}_3 \bar{v}_1 - \bar{y}_2 \bar{v}_4}{1 + \bar{y}_1} \end{aligned}$$

geschehen. Der so bestimmte Vektor $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4)$ ist wegen (3) wieder ein Einheitsvektor. Aufgrund von (41), (150) und (151) sind nun die Komponenten $v_{k,0}'$ der Anfangsgeschwindigkeit im regularisierten System je nach dem am Stoss beteiligten Zentralkörper durch

$$(158) \quad v_{k,0}' = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \bar{v}_k, \quad k=1,2,3,4$$

(Stoss mit μ , $\sigma = -1$)

oder durch

$$(159) \quad v_{1,0}' = -\sqrt{\frac{1-\mu}{2}} \bar{v}_1, \quad v_{k,0}' = \sqrt{\frac{1-\mu}{2}} \bar{v}_k, \quad k=2,3,4$$

(Stoss mit $(1-\mu)$, $\sigma = -1$)

gegeben.

Die Nebenbedingung ist in den unkonformen Punkten inhaltslos und somit immer erfüllt.

Die Vieldeutigkeit bei der Uebertragung der Anfangswerte in den Raum S^4 kommt in diesem besonderen Fall durch die Bestimmung des Geschwindigkeitsvektors zustande, während im Normalfall die Anfangslage in S^4 vieldeutig ist (siehe Rücktransformationsverfahren in 1.4. oder 2.3.).

3. REGULARISIERUNG VERWANDTER PROBLEME

3.1. Das elliptische restringierte Dreikörperproblem

Das elliptische restringierte Dreikörperproblem ist gegenüber dem allgemeinen Dreikörperproblem dadurch charakterisiert, dass einer der drei Körper, das Mobil m , die Masse Null hat. Die beiden andern Körper, die zentralen Massen $(1-\mu)$ und μ , bewegen sich auf Keplerellipsen um ihren Schwerpunkt σ (der Fall hyperbolischer oder parabolischer Bewegung der Zentralkörper hat nur geringe Bedeutung und wird darum hier weggelassen). Wir verwenden ähnlich wie in 2.1. ein rechtwinkliges Koordinatensystem η_1, η_2, η_3 mit Nullpunkt im Schwerpunkt der Zentralkörper. Das System rotiere mit der variablen Winkelgeschwindigkeit ω so um die η_3 -Achse, dass die zentralen Massen ständig auf der η_1 -Achse liegen. Der Drehwinkel ψ bei dieser Rotation wird als die wahre Anomalie des Körpers μ bei der Keplerbewegung um σ definiert. In diesem Koordinatensystem sind aber die Zentren nicht fest; sowohl ihr gegenseitiger Abstand ℓ als auch die Winkelgeschwindigkeit ω hängen von ψ ab. Die Abszissen der Zentren sind $-\mu \ell(\psi)$ bzw. $(1-\mu)\ell(\psi)$.

Längeneinheit sei die grosse Halbachse der relativen Keplerellipse (=Mittel aus Maximum und Minimum von ℓ); die Umlaufzeit: betrage 2π Zeiteinheiten. In den damit und durch die Bezeichnung der Massen festgelegten Einheiten hat die Gravitationskonstante aufgrund des dritten Keplerschen Gesetzes den Wert 1.

Aus der Theorie der Keplerbewegung (siehe z.B. [10], Band 1) entnehmen wir die folgenden Beziehungen

$$(160) \quad \ell(\psi) = \frac{r}{1+e \cos \psi} \quad , \quad \omega(\psi) = \frac{d\psi}{dt} = \frac{\sqrt{r}}{[\ell(\psi)]^2} .$$

e ($0 < e < 1$) ist die Exzentrizität, $\rho = 1 - e^2$ der Parameter der Keplerellipse. Der zeitliche Verlauf wird über die exzentrische Anomalie E durch

$$(161) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{E}{2} &= \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} , \\ t &= E - e \sin E \end{aligned}$$

dargestellt (Keplersche Gleichung).

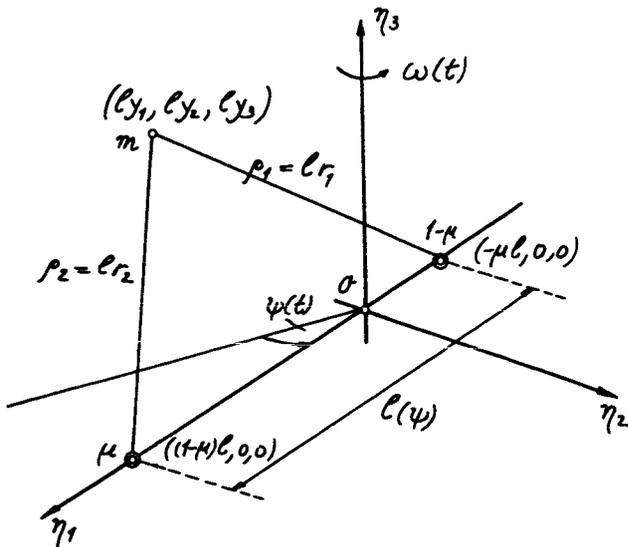
Im Koordinatensystem η_1, η_2, η_3 gelten die folgenden Differentialgleichungen für die Bewegung des Mobils:

$$(162) \quad \begin{aligned} \ddot{\eta}_1 - 2\omega \dot{\eta}_2 - \omega^2 \eta_1 - \dot{\omega} \eta_2 &= -\partial G / \partial \eta_1 \\ \ddot{\eta}_2 + 2\omega \dot{\eta}_1 - \omega^2 \eta_2 + \dot{\omega} \eta_1 &= -\partial G / \partial \eta_2 \\ \ddot{\eta}_3 &= -\partial G / \partial \eta_3 , \end{aligned}$$

wobei

$$G = -\frac{1-\mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2}$$

das Gravitationspotential und ρ_1, ρ_2 die Abstände des Mobils von den Zentren bedeuten.



Man hat nun den Wunsch nach einem Koordinatensystem, in dem die Zentren wieder fest sind. Dies kann erreicht werden durch Einführung der dimensionslosen Variablen y_i, r_1, r_2 mittels der Gleichungen

$$(163) \quad \eta_i = \ell y_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad \rho_1 = \ell r_1, \quad \rho_2 = \ell r_2.$$

Aus der Definition der Abstände ρ_1, ρ_2 folgt damit

$$(164) \quad \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(y_1 + \mu)^2 + y_2^2 + y_3^2} \\ r_2 &= \sqrt{(y_1 + \mu - 1)^2 + y_2^2 + y_3^2}. \end{aligned}$$

Nach einem Vorschlag von Scheibner [11] ist die wahre Anomalie ψ die richtige unabhängige Variable zur Beschreibung des elliptischen restringierten Dreikörperproblems. Striche bezeichnen im folgenden Ableitungen nach ψ . Die auf die neuen Variablen umgerechneten Differentialgleichungen lauten nach [12], [13]

$$(165) \quad \begin{aligned} y_1'' - 2y_1' &= -\frac{\ell}{r} \frac{\partial U}{\partial y_1} \\ y_2'' + 2y_2' &= -\frac{\ell}{r} \frac{\partial U}{\partial y_2} \\ y_3'' + y_3 &= -\frac{\ell}{r} \frac{\partial U}{\partial y_3}, \end{aligned}$$

wobei

$$(166) \quad \begin{aligned} U(r_1, r_2) &= -(1-\mu)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{r_1^2}{2}\right) - \mu\left(\frac{1}{r_2} + \frac{r_2^2}{2}\right) + U_0, \\ \frac{\ell}{r} &= \frac{1}{1+e \cos \psi} \end{aligned}$$

ist. U_0 ist eine zunächst noch beliebige Konstante. Für $e=0$ wird das elliptische zum kreisförmigen restringierten Dreikörperproblem; andererseits wird dann $\ell/\mu=1$, $\psi=t$, woraus die Analogie von (165) zu den Differentialgleichungen des restringierten Kreisproblems offenbar wird.

Allerdings besteht doch ein wesentlicher Unterschied zwischen dem kreisförmigen und dem elliptischen Fall: Da e/μ explizit von der unabhängigen Variablen ψ abhängt, existiert das Jacobi-Integral nicht. Multiplikation der i -ten Gleichung von (165) mit y_i' und Summation über i ergibt die Beziehung

$$(167) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{d\psi} (y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2 + y_4'^2) = - \frac{1}{1 + e \cos \psi} \frac{dU}{d\psi},$$

die sich nicht in geschlossener Form integrieren lässt.

Daraus kann man aber als Ersatz für das Jacobi-Integral durch Integration einen Arbeitssatz herleiten. Zu diesem Zweck seien jetzt zum Anfangswert ψ_0 der wahren Anomalie die dimensionslosen Koordinaten des Mobils und deren Ableitungen nach ψ gegeben:

$$(168) \quad y_i(\psi_0) = y_{i0}, \quad y_i'(\psi_0) = y_{i0}', \quad i = 1, 2, 3.$$

Die Integration der Gleichung (167) von der unteren Grenze ψ_0 bis zu einem allgemeinen Wert von ψ ergibt nun

$$(169) \quad \frac{1}{2} (y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2 + y_4'^2) + \int_{\psi_0}^{\psi} \frac{dU}{1 + e \cos \psi} = h,$$

wobei die Energiekonstante h durch

$$(170) \quad h = \frac{1}{2} (y_{10}'^2 + y_{20}'^2 + y_{30}'^2 + y_{40}'^2)$$

gegeben ist.

Um jetzt noch die in (166) auftretende Konstante U_0 zu spezifizieren, führen wir zunächst die zu ψ_0 gehörenden Anfangswerte r_{10}, r_{20} der Abstände r_1, r_2 ein (sie ergeben sich durch Einsetzen von $y_i = y_{i0}$ in (164)). U_0 soll nun so gewählt werden, dass

$$(171) \quad \mathcal{U}(r_{10}, r_{30}) = \mathcal{U}(r_1(\psi_0), r_2(\psi_0)) = 0$$

wird. Somit müssen wir gemäss (166)

$$(172) \quad \mathcal{U}_0 = (1-\mu)\left(\frac{1}{r_{10}} + \frac{r_{20}^2}{2}\right) + \mu\left(\frac{1}{r_{30}} + \frac{r_{20}^2}{2}\right)$$

setzen.

Die Gleichungen (165) haben dieselben Singularitäten wie die Bewegungsgleichungen des restringierten Kreisproblems. Deshalb kann man zur Regularisierung des elliptischen Problems so lange nach dem Muster im 2. Kapitel vorgehen, als dort das Jacobi-Integral nicht gebraucht wird.

Wir versuchen daher, dem System (165) eine Lagrangefunktion zuzuordnen und finden die zu (109) analoge Funktion

$$(173) \quad L = \frac{1}{2}(y_1'^2 + y_2'^2 + y_3'^2) - y_1 y_1' + y_1 y_2' - \frac{1}{2} y_3'^2 - \frac{\mathcal{U}(r_1, r_2)}{1 + e \cos \psi}$$

Man beachte, dass $1 + e \cos \psi$ nur von ψ und nicht von den y_i abhängt. Der letzte Term von L enthält die unabhängige Variable explizit (zeitabhängige Lagrangefunktion).

Da L noch in die Klasse (117) von Lagrangefunktionen fällt, bleiben alle in 2.1. angestellten Betrachtungen auch hier gültig. Es ist lediglich in den von dort übernommenen Beziehungen t in ψ abzuändern. Wir setzen zur Regularisierung des elliptischen Problems bei Gleichung (130) wieder ein. Angepasst an die Lagrangefunktion (173) und an die neuen Bezeichnungen, lautet (130)

$$(174) \quad \frac{d}{d\psi} \left(\frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} v_k' \right) + 2 \sum_{q=1}^4 (b_{1q} b_{2k} - b_{2q} b_{1k}) v_q' \quad k=1,2,3,4$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{q=1}^4 (v_q')^2 \frac{\partial}{\partial v_k} \left(\frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right) + \frac{\partial}{\partial v_k} \left(\frac{y_3^2}{2} + \frac{\mathcal{U}(r_1, r_2)}{1 + e \cos \psi} \right) = 0$$

Dabei muss man sich wieder y_3, τ, ψ, b_{ik} mittels (113), (58) und (82) ($c = \frac{1}{2}$) durch die v_k ausgedrückt denken.

Nach dem Vorgehen in 2.2. schreiben wir jetzt den Arbeitssatz (169) mit Hilfe von (86) in den regularisierten Koordinaten v_k . Aus später zu erläuternden Gründen formen wir gleichzeitig das Integral in (169) durch partielle Integration um unter Benutzung von (171):

$$(175) \quad h = \frac{1}{2} \frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \sum_{p=1}^k (v_p')^2 + \frac{1}{2} y_3^2 + \frac{\mathcal{U}(r_1, r_2)}{1 + e \cos \psi} - \int_{\psi_0}^{\psi} \mathcal{U}(r_1, r_2) d\left(\frac{1}{1 + e \cos \psi}\right).$$

Multiplikation von (174) mit $r_1 r_2 / (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$ und Einsetzen von (175) ergibt:

$$(176) \quad \frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \frac{d}{d\psi} \left(\frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \frac{dv_k}{d\psi} \right) + 2 \sum_{p=1}^k (b_p b_{2p} - b_p b_{1p}) \frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \frac{dv_k}{d\psi} + \left[\frac{\mathcal{U}(r_1, r_2)}{1 + e \cos \psi} + \frac{1}{2} y_3^2 - h \right] \frac{\partial}{\partial v_k} \left(\frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right) + \frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \frac{\partial}{\partial v_k} \left[\frac{\mathcal{U}(r_1, r_2)}{1 + e \cos \psi} + \frac{y_3^2}{2} \right] - \frac{\partial}{\partial v_k} \left(\frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right) \cdot \int_{\psi_0}^{\psi} \mathcal{U}(r_1, r_2) \frac{e \sin \psi}{(1 + e \cos \psi)^2} d\psi = 0.$$

Damit die regularisierten Gleichungen möglichst übersichtlich werden, verwenden wir die der zweiten Zeittransformation (139) entsprechende Beziehung

$$(177) \quad \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

zur Einführung der neuen unabhängigen Variablen τ .

Bevor wir τ in (176) einführen, bemerken wir, dass die Funktion

$$(178) \quad \begin{aligned} W(r_1, r_2) &= r_1 r_2 \mathcal{U}(r_1, r_2) \\ &= -(1 - \mu) r_2 \left(1 + \frac{r_2^2}{2} \right) - \mu r_1 \left(1 + \frac{r_1^2}{2} \right) + r_1 r_2 \mathcal{U}_0 \end{aligned}$$

sowie ihre partiellen Ableitungen nach ψ bei beiden Arten von Zusammenstößen endlich bleiben.

In dem im letzten Term von (176) auftretenden Integral ($-\theta$) substituieren wir jetzt den in (177) definierten Parameter τ als neue Integrationsvariable:

$$(179) \quad \begin{aligned} \theta &= \int U(r_1, r_2) \frac{e \sin \psi}{(1 + e \cos \psi)^2} d\psi \\ &= \int_{\psi}^{\tau} \frac{W(r_1, r_2)}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \cdot \frac{e \sin \psi}{(1 + e \cos \psi)^2} d\tau . \end{aligned}$$

Wegen der Form (178) der Funktion $W(r_1, r_2)$ ist das Integral θ bei allen Kollisionen eigentlich. Für das ursprüngliche Integral in (169) wäre diese Aussage nicht richtig gewesen. Durch die oben ausgeführte partielle Integration wurden vom ursprünglichen Integral diejenigen Glieder abgespalten, die Singularitäten enthalten.

Unter Verwendung von (177), (178) und (179) erhält man nun aus (176) als Schlussresultat das bei allen Kollisionen reguläre System

$$(180) \quad \begin{aligned} \frac{dv_k}{dt} + 2 \sum_{q=1}^4 (b_{1q} b_{2k} - b_{2q} b_{1k}) \frac{dv_q}{dt} & \quad k=1, 2, 3, 4 \\ + \frac{\partial}{\partial v_k} \left[\frac{W(r_1, r_2)}{1 + e \cos \psi} + r_1 r_2 \left(\frac{1}{2} v_3^2 - h \right) \right] & - \theta \frac{\partial}{\partial v_k} \left(\frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \right) = 0 . \end{aligned}$$

Dazu gehören auch die regulären Differentialgleichungen für θ und ψ aus (179) und (171):

$$(181) \quad \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{W(r_1, r_2)}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \cdot \frac{e \sin \psi}{(1 + e \cos \psi)^2} , \quad \theta(\tau_0) = 0 ,$$

$$(177) \quad \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{r_1 r_2}{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} , \quad \psi(\tau_0) = \psi_0 .$$

Hier wurden noch die Anfangswerte für den zu $\psi = \psi_0$ gehörenden (beliebig wählbaren) Wert τ_0 von τ angegeben.

Im Gegensatz zum Abschnitt 2.3. kann jetzt bei einer numerischen Rechnung die der Zeit entsprechende Variable ψ nicht nachträglich bestimmt werden. Vielmehr muss ψ mit (177) in das Differentialgleichungssystem einbezogen werden, damit man bei jedem Schritt die Grundlage für die Auswertung von (180) erhält. Es entsteht somit ein simultanes System von zehn Differentialgleichungen erster Ordnung für ψ_k , $dv_k/d\tau$, ($k=1,2,3,4$), θ , ψ als Funktionen von τ .

Aus diesen Grössen bekommt man die Koordinaten η_i des Mobils mit Hilfe der B_3 -Transformation (113) und der Beziehungen (160) und (163). Die physikalische Zeit ergibt sich ohne Integration aus der Kepler-Gleichung (161).

Auch beim elliptischen restringierten Dreikörperproblem bleiben die Ableitungen der ψ_k nach der unabhängigen Variablen ($-\tau$) immer endlich; insbesondere folgen aus dem Arbeitssatz (175) die zu (150) und (151) analogen Beziehungen für einen Zusammenstoss des Mobils mit dem Zentralkörper μ bzw. $(1-\mu)$:

$$(182) \quad \sum_{k=1}^4 \left(\frac{d\psi_k}{d\tau} \right)^2 \rightarrow \begin{cases} 8\mu/(1+e \cos \psi_0) & (\text{Stoss mit } \mu) \\ 8(1-\mu)/(1+e \cos \psi_0) & (\text{Stoss mit } (1-\mu)) \end{cases}$$

Dabei ist ψ_0 der Grenzwert von ψ für den betrachteten Stoss. Der Faktor 8 rührt von der Verwendung der zweiten Zeittransformation her.

Das ebene elliptische restringierte Dreikörperproblem ist schon 1964 von Szebehely und Giacaglia [14] regularisiert worden. Im Gegensatz zu unserem Differentialgleichungssystem mussten aber diese Autoren ein Integro-Differentialgleichungssystem benutzen.

3.2. Ausblick

Neben den bis jetzt besprochenen gibt es noch einige Varianten des Dreikörperproblems, die sich mit der KS- oder der B_3 -Transformation regularisieren lassen. Diese Beispiele sollen jedoch nur noch kurz gestreift werden, da bei ihnen der Nutzen einer Regularisierung noch fraglich ist.

Da wäre zunächst das Hillsche Mondproblem (siehe z.B. [10], Band 2!), das Problem der Bewegung des Mondes um die Erde bei Berücksichtigung des Einflusses einer unendlich weit entfernten Sonne (von unendlicher Masse). Da hier nur eine Singularität vorliegt, lässt sich die Regularisierung mit der KS-Transformation nach den in [2] angegebenen Methoden erreichen.

Zwei Singularitäten sind in den Gleichungen der Bewegung eines Mobils um zwei im Raum fixierte Zentren vorhanden (Zweizentrenproblem, [10], Band 2). In diesem Fall lässt sich ohne weiteres mit der B_3 -Transformation regularisieren. Da das Zweizentrenproblem aber mittels elliptischer Funktionen exakt gelöst werden kann, verliert die Regularisierung an Bedeutung.

Eine Anwendung des Zweizentrenproblems hat Vinti [15] gefunden. Er zeigte, dass die Bewegung eines Satelliten um die abgeplattete Erde näherungsweise als Bewegung um zwei feste, im Komplexen gelegene Massenpunkte aufgefasst werden kann. Möglicherweise kann hier die Birkhoff-Regularisierung die Stabilitätseigenschaften bei der numerischen Integration verbessern. Dies ist noch Gegenstand weiterer Untersuchungen.

LITERATUR

1. P.Kustaanheimo: Spinor Regularization of Kepler Motion. Ann. Univ. Turkuens., A, I, 73 (1964). Publ. no. 102, Astron. Observatory, Helsinki (1964).
2. P.Kustaanheimo and E.Stiefel: Perturbation Theory of Kepler Motion based on Spinor Regularisation. Journal für die reine und angewandte Mathematik 218 (1965), 204.
3. T.Levi-Civita: Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps. Opere matematiche, Vol. 2, Bologna 1956.
4. W.Blaschke: Analytische Geometrie. Wolfenbüttel und Hannover 1948. Speziell Seite 38.
5. E.Stiefel et J.Waldvogel: Généralisation de la régularisation de Birkhoff pour le mouvement du mobile dans l'espace à trois dimensions. C.R. Acad. Sc. Paris 260 (1965), 805.
6. G.D.Birkhoff: The Restricted Problem of Three Bodies. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 39 (1915), 1.
7. T.N.Thiele: Recherches numériques concernant les solutions périodiques d'un cas spécial du problème des trois corps. Astronom. Nachr. 138 (1895).
8. K.F.Sundman: Mémoire sur le problème des trois corps. Acta Soc. Sci. Fenn. 34, Nr.6 (1907).
9. C.L.Siegel: Vorlesungen über Himmelsmechanik. Springer 1956.
10. K.Stumpff: Himmelsmechanik. Band 1, Berlin 1959; Band 2, Berlin 1965.

11. W.Scheibner: Satz aus der Störungstheorie. Journal für die reine und angewandte Mathematik 65 (1866), 291.
12. V.Nechvíle: Sur une nouvelle forme d'équations différentielles du problème restreint elliptique. C.R. Acad. Sc. Paris 182 (1926), 310.
13. Z.Kopal: Motion of the moon and dynamics of the earth-moon system. Boeing Sci. research Labs. Math. note 402 (1965), 98.
14. V.Szebehely and G.Giacaglia: On the Elliptic Restricted Problem of Three Bodies. Astronomical Journal 69 (1964), 230.
15. J.P.Vinti: Formulae for an accurate intermediary Orbit of an Artificial Satellite. Astronomical Journal 66 (1961), 514.

LEBENS LAUF

Am 24. Februar 1938 wurde ich in Zürich geboren. Nachdem ich in Zürich-Wollishofen während sechs Jahren die Primarschule und während zwei Jahren die Sekundarschule besucht hatte, trat ich 1953 in die Oberrealschule des Kantons Zürich ein, wo ich 1957 mit der Maturität Typus C abschloss. Im gleichen Herbst immatrikulierte ich mich an der Abteilung für Mathematik und Physik der Eidgenössischen Technischen Hochschule, wo ich nach neunsemestriger Studienzeit im Frühjahr 1962 das Diplom für Mathematik erwarb. Bis 1964 war ich als Assistent von Herrn Prof. Dr. E. Stiefel am Institut für angewandte Mathematik der Eidgenössischen Technischen Hochschule tätig. Seither arbeite ich am selben Institut als wissenschaftlicher Mitarbeiter und habe dabei von Herrn Prof. Stiefel die Gelegenheit erhalten, die vorliegende Arbeit auszuführen.